Зимски семестар 2021/2022 Вежбе из Анализе 1
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Шеста недеља

1.1 Низови

Теорема. Нека је $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ строго растући низ, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$ и постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$. Тада је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$.

1. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}}{n}$.

Решење. Овде је $y_n = n$ строго растући низ, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, као и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{n+1} = 1$, па је применом Штолцове теореме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt[k]{k}}{n} = 1.$$

2. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^4}{n^5}$.

Решење. Овде је $y_n = n^5$ строго растући низ, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, као и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4}{(n+1)^5-n^5} = \frac{1}{5}$, па је применом Штолцове теореме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^4}{n^5} = \frac{1}{5}.$$

3. Наћи $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}}$, $p \in \mathbb{N}$.

Решење. Овде је $y_n = n^{p+1}$ строго растући низ, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, као и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^p}{(n+1)^{p+1}-n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$, па је применом Штолцове теореме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$

4. Доказати Кошијев став: Ако је $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, онда је и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n} = a$.

Решење. Овде је $y_n = n$ строго растући низ, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, као и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_{n+1}-y_n}{n+1-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{1} = a$, па је применом Штолцове теореме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k}{n} = a.$$

5. Доказати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

Решење. Доказаћемо да је $n! > (\frac{n}{3})^n$ индукцијом. За $n = 1$ неједнакост је тачна. Претпоставимо да је тачна за n и докажимо за $n+1$:

$$(n+1)! = n!(n+1) > (\frac{n}{3})^n(n+1) = (\frac{n+1}{3})^{n+1}\frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} > (\frac{n+1}{3})^{n+1}.$$

Последња неједнакост је тачна, јер је (применом биномне формуле)

$$(1+\frac{1}{n})^n < 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}),$$

$$(1+\frac{1}{n})^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!},$$

$$(1+\frac{1}{n})^n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3.$$

Даље се доказ изводи на основу теореме о три лимеса.

6. Доказати да је низ $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ растући и ограничен одозго, а низ $y_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ опадајући и ограничен одоздо. Зато они имају заједничку граничну вредност:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e.$$

Решење. Како је
$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = (1 - \frac{1}{(n+1)^2})^{n+1}\frac{n+1}{n} > (1 - \frac{1}{n+1})\frac{n+1}{n} = 1,$$
а применом Бернулијеве неједнакости је
$$\frac{y_n}{y_{n-1}} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n^2-1})^n}\frac{n+1}{n} < \frac{1}{1+\frac{n}{n^2-1}}\frac{n+1}{n} < 1,$$
то је низ x_n растући, а y_n је опадајући. Такође, $0 < y_n - x_n < \frac{e}{n} \to 0$, $n \to \infty$, одакле следи да су лимеси ових низова једнаки међусобно и једнаки e.

7. Нека је p_n произвољан низ бројева који тежи $+\infty$ и q_n произвољан низ бројева који тежи $-\infty$ кад $n \to \infty$. Доказати да је
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{p_n})^{p_n} = \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{q_n})^{q_n}.$$

Решење. Нека је n_k било који број целих бројева који тежи $+\infty$. Тада је
$$\lim_{n_k\to\infty}(1+\frac{1}{n_k})^{n_k} = e.$$
Ако низ произвољних бројева p_k тежи $+\infty$, то постоји такав низ цијелих бројева n_k да је $n_k < p_k < n_k + 1$ и $n_k \to \infty$. Како лева и десна страна неједнакости
$$(1+\frac{1}{n_k+1})^{n_k} < (1+\frac{1}{p_k})^{p_k} < (1+\frac{1}{n_k})^{n_k+1}$$
теже e, то је по теореми о три лимеса и
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{p_n})^{p_n} = e.$$
Аналогно за негативан низ.

8. Доказати да је $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^{-1}$.

Решење. Посматрати низ $\frac{\ln\frac{n!}{n^n}}{n}$ и применити Штолцову теорему.

9. Доказати:
$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1} = e,$$
$$\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n})^{n} = e^{-1},$$
$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n-1})^{n} = e^{2},$$
$$\lim_{n\to\infty}(\frac{2n+3}{2n+1})^{n} = e.$$

Решење. Кори7ењем претходног задатка и чињенице да непрекидна експоненцијална функција комутира са лимесом.

10. Доказати да је $\frac{1}{n+1} \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n}$ за свако $n \in \mathbb{N}$ и да је $\frac{r}{r+1} \leqslant \ln\left(1+r\right) \leqslant r$ за свако $r \in \mathbb{Q}$.

Решење. На основу једног од претходних задатака $\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant e \leqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Логаритмовањем и сређивањем израза добија се жељена неједнакост. Уопштавањем се добија неједнакост и за рационалне бројеве.