1 час, Парцијалне једначине II реда

1. Одредити тип ПДЈ $u_{xx} - 2\sin x u_{xy} - (3+\cos^2 x)u_{yy} - \cos x u_y = 0$ и свести је на канонски облик.
Дата једначина је хиперболичног типа, а канонски облик је $y_{\xi\eta} = 0$.
2. Одредити тип ПДЈ $x^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + y^2 u_{yy} - 2y u_x = 0$ и свести је на канонски облик.
Дата једначина је параболичног типа, а канонски облик је $u_{\eta\eta} + 2(\frac{\xi}{\eta})^2 u_\xi = 0$.
3. Одредити тип ПДЈ $y^2 u_{xx} + 2xy u_{xy} + 2x^2 u_{yy} + y u_y = 0$ и свести је на канонски облик.
Дата једначина је елиптичног типа, а канонски облик је $u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{u_\xi}{\xi+\eta} + \frac{u_\eta}{2\eta} = 0$.
4. Одредити области у којима је једначина $x u_{xx} + y u_{yy} + 2u_x + 2u_y = 0$ хиперболичног, параболичног и елиптичног типа и у сва три случаја написати формуле трансформације за свођење на канонски облик.
5. Наћи опште решење следећих ПДЈ:
а) $e^y u_{xy} - u_{yy} + u_y = 2(x + e^y)$,
б) $3u_{xx} - 5u_{xy} - 2u_{yy} + 3u_x + u_y = 2$.
6. Датом сменом наћи опште решење следећих ПДЈ: а) $\frac{\delta(x^2 u_x)}{\delta x} = x^2 u_{yy}$, $v(x,y) = x u(x,y)$,
б) $(x-y)u_{xy} - u_x + u_y = 0$, $v(x,y) = (x-y)u(x,y)$.
7. Решити Кошијев проблем:
$4u_{xx} + 4u_{xy} + u_{yy} + 2u_x + u_y + \frac{u}{4} = 0$,
$u|_{y=0} = x^2 e^{-\frac{x}{4}}$, $u_y|_{y=0} = 0$.
8. Решити следеће Гурсаове проблеме:
а) $2u_{xx} - 2u_{yy} + u_x + u_y = 0$, $|x| < y$,
$u|_{y=x} = 1$, $u|_{y=-x} = (1+x)e^x$,
б) $y^2 u_{xx} + u_{xy} = 0$, $y^3 - 8 < 3x < y^3$, $0 < y < 2$,
$u|_{y=2} = 3x + 8$, $u|_{3x=y^2} = 2y^3$.

Мешовити проблем хомогене таласне једначине на правој са хомогеним граничним условима

Проблем: У области $D = (0,l)\times(0,\infty)$ одредити нетривијално класично решење $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ хомогене таласне једначине

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},\ \ x,t \in D$$

која задовољава хомогене граничне услове

$$u(0,t) = 0,\ \ u(l,t) = 0,\ \ t > 0,$$

и почетне услове

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\ u'_t(x,0)=\varphi_1(x),\ x\in(0,l).$$

Посматрани проблем се решава Фуријеовом методом раздвајања променљивих:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= X(x)T(t),\ x\in[0,l],\ t\geqslant 0,\\ X(x)T''(t) &= a^2X''(x)T(t),\\ \frac{T''(t)}{a^2T(t)} &= \frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,\ \lambda=const,\ X(0)=X(l)=0. \end{aligned}$$

што се своди на решавање регуларног Штурм-Лиувиловог проблема

$$\begin{aligned} X''(x)+\lambda X(x)=0,\\ X(0)=X(l)=0, \end{aligned}$$

и решавање ОДЈ

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0.$$

Интерпретација проблема: Жица дужине l слободно осцилује, $u(x,0)=\varphi_0(x)$ даје положај жице у тренутку $t=0$, а $u'_t(x,o)=\varphi_1(x)$ је почетна брзина осциловања жице. Жица је учвршћена на крајевима: $u(0,t)=u(l,t)=0$ за $t>0$.

Решимо разматрани Штурм-Лиуилов проблем:

$$\begin{aligned} X''(x)+\lambda X(x) &= 0,\ X(0)=X(l)=0\\ X(x) &= C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x,\ X(0)=X(l)=0,\\ C_2 &\neq 0,\sin\sqrt{\lambda}l=0,\\ \lambda_k &= (\frac{k\pi}{l})^2,\\ X_k(x) &= \sin\sqrt{\lambda_k}x=\sin\frac{k\pi x}{l}. \end{aligned}$$

Решимо разматрану ОДЈ:

$$T''_k(t)+a^2(\frac{k\pi}{l})^2T_k(t)=0,$$

$$T_k(t)=C_k\cos\frac{ak\pi t}{l}+D_k\sin\frac{ak\pi t}{l}.$$

Решење полазног проблема је облика $u(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x,t)$, $u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t)$, $k \geqslant 1$.

1. Одредити закон осциловања жице дужине l, учвршћене на крајевима, која је у пресецима удаљеним за $\frac{l}{3}$ од крајњих тачака изведена из равнотежног положаја за амплитуду x_0, тако да је средишњи део паралелан њеном равнотежном положају, па потом пуштена да осцилује без почетне брзине.