Зимски семестар 2021/2022 Вежбе из Анализе 1
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Осма недеља

1.1 Функције

1. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+nx)^m-(1+mx)^n}{x^2}$.

Решење. Применом биномне формуле, добија се да је тражени лимес $\binom{n}{2}m^2 - \binom{m}{2}n^2$.

2. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^m-1}{x^n-1}$, $m, n \in \mathbb{N}$

Решење. Канцелацијом са $x-1$, добија се да је тражени лимес једнак $\frac{m}{n}$.

3. Наћи $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n})$.

Решење. Увођењем смене $t = x - 1$ и применом биномне формуле, добија се да је тражени лимес $\frac{m-n}{2}$.

4. Наћи $\lim\limits_{x\to a+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

Решење. Факторисањем разлике квадрата и канцелацијом са $\sqrt{x-a}$, добија се да је тразхени лимес $\frac{1}{\sqrt{2a}}$.

5. Наћи $\lim\limits_{x\to 8} \frac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

Решење. Кори71ењем идентитета $t^2 - a^2 = (t-a)(t+a)$ и $t^3 - a^3 = (t-a)(t^2+ta+a^2)$, добија се да је тражени лимес $\frac{12}{5}$.

6. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{2}$.

Решење. Кори71ењем адиционе формуле и познатог лимеса $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, добија се да је тражени лимес $\frac{1}{2}$.

7. Наћи $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 7x - \sin 4x}{\sin 2x}$.

Решење. Кори71ењем адиционе формуле, добија се да је тражени лимес $\frac{3}{2}$.

8. Наћи $\lim\limits_{x\to \pi} \frac{\sin mx}{\sin nx}$.

Решење. Увођењем смене $x = \pi + t$ и применом адиционе формуле, добија се да је тражени лимес $(-1)^{m-n}\frac{m}{n}$.

9. Нека је $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Наћи $\lim\limits_{x\to a} \frac{\tan x - \tan a}{x-a}$.

Решење. Лимес је једнак $\frac{1}{\cos^2 a}$.

10. Доказати да не постоји $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$.

Решење. Тражено се закључује посматрањем лимеса на низовима $n\pi$ и $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ и применом Хајнеове теореме.