Зимски семестар 2021/2022 Вежбе из Анализе 1
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Седма недеља

1.1 Низови

1. Нека је $a > b > 0$ и $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $y_1 = \sqrt{ab}$ и $x_{n+1} = \frac{x_n+y_n}{2}$, $y_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}$. Доказати да низови x_n и y_n конвергирају.

Решење. Индукцијом се проверава да је низ y_n добро дефинисан, док је добра дефинисаност низа x_n очигледна. Приметимо да је на основу АГ неједнакости $x_n \geqslant y_n$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Низ x_n је растући, док је низ y_n опадајући. Оба низа су ограничена. Нека је $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Пуштањем лимеса кроз рекурентне формуле које дефинишу посматране низове, добија се $x = y$.

2. Нека је $x_1 = 0$ и $x_n = \frac{1}{1+x_n}$. Доказати да низ конвергира и наћи лимес.

Решење. Индукцијом се показује да је низ добро дефинисан, а одатле следи и ограниченост низа одозго са 1. Подниз чланова са непарним индексима је растући, а подниз чланова са парним индексима је опадајући, што се проверава индукцијом. Нека је $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$ и $y = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n+1}$. Тада, $x = \frac{1}{1+y}$ и $y = \frac{1}{1+x}$, одакле следи $x = y$. Дакле, $x^2 + x - 1 = 0$ и $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (друго решење одбацујемо због његове негативности).

3. Нека је $x_0 = a > 0$ и $x_{n+1} = \frac{3x_n^2}{1+2x_n}$. Доказати да низ конвергира и наћи лимес.

Решење. Низ је добро дефинисан, што се проверава индукцијом. Ако је $x_n < 1$, низ опада, а ако је $x_n > 1$ низ расте. Проверава се да за $0 < a < 1$ важи $x_n < 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$, а за $a > 1$ је $x_n > 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$. У првом случају, гранична вредност је 0, а у другом случају низ дивергира.

4. Нека је $x_{n+1} = x_n^2 - x_n + 1$, $x_1 = a \in \mathbb{R}$. Испитати конвергенцију низа.

Решење. За $a = 0$ или $a = 1$ низ је константан (сваки члан је једнак 1) и конвергира. Претпоставимо да је $a \neq 1 = 0$, $a \neq 1$. Тада, низ је добро дефинисан и $x_{n+1} - x_n \geqslant 0$, па је растући. Кандидат за лимес је 1. У случајевима $a > 1$ и $a < 0$ низ дивергира. У случају $0 < a < 1$, низ је ограничен одозго са 1 и конвергира. Дакле, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ за $a \in [0, 1]$.

5. Доказати да $\sin n$ и $\cos n$ дивергирају.

Решење. Претпоставимо супротно, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin n = a$. Тада је и $\lim\limits_{n\to\infty} \cos n = \sqrt{1-a^2}$. Са друге стране, због $\sin 2n = 2 \sin n \cos n$, мора бити $a = 2a\sqrt{1-a^2}$ и због $\cos 2n = \cos^2 n - \sin^2 n$ мора бити $\sqrt{1-a^2} = 1 - 2a^2$. Из прве једнакости је $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, сменом у другу, добија се $\frac{1}{4} = 1 - 2 \cdot \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$. Контрадикција.

Дефиниција 1. Подниз низа x_n је пресликавање $x \circ \varphi$, где је $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ које је "1-1"и строго растуће.

Дефиниција 2. x је тачка нагомилавања низа x_n ако у свакој ε-околини има бесконачно много чланова низа.

Теорема. Сваки ограничен низ има тачку нагомилавања.

Теорема. Тачка x је тачка нагомилавања низа акко постоји подниз x_{n_k} тако да $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = x$.

6. Одредити скуп тачака нагомилавања низа $(-1)^n(2 + \frac{3}{n})$.

Решење. Низ $(-1)^n$ дивергира и има две тачке нагомилавања, -1 и 1, док низ $2 + \frac{3}{n}$ конвергира ка 2. Скуп тачака нагомилавања је $\{-2, 2\}$.

7. Одредити скуп тачака нагомилавања низа $(1 + \frac{1}{n})^n(-1)^n + \sin n\pi 4$.

Решење. Како је

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e,$$

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & n = 2k, \\ -1, & n = 2k+1, \end{cases}$$

и

$$\sin\frac{n\pi}{4} = \begin{cases} 0 & n = 8k, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 8k+1, \\ 1, & n = 8k+2, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 8k+3, \\ 0 & n = 8k+4, \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 8k+5, \\ -1, & n = 8k+1, \\ \frac{\sqrt{2}}{2}, & n = 8k+7, \end{cases}$$

то је скуп тачака нагомилавања $A = \{-e - \frac{\sqrt{2}}{2}, -e + \frac{\sqrt{2}}{2}, e, e-1, e+1\}$.

8. Одредити скуп тачака нагомилавања низа $\frac{n^2}{1+n^2}\cos\frac{2n\pi}{3}$.

Решење. Аналогно претходним задацима, скуп тачака нагомилавања је $\{-\frac{1}{2}, 1\}$.

9. Нека је $x_1 \in (0,1)$ и $x_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln(1+x_k)$ за $n > 1$. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Решење. Индукцијом (уз кори71ење неједнакости $\ln(1+x) \leqslant x$) се показује да је $x_n \in (0,1)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Како је $nx_{n+1} - (n-1)x_n = \ln(1+x_n)$, тј. $x_{n+1} - x_n = \frac{\ln(1+x_n)-x_n}{n} < 0$, то је низ опадајући. Дакле, низ x_n конвергира и за његов лимес важи $x = \ln(1+x)$, односно $x = 0$.

10. Нека је $x_0 \in (0,\pi)$ и $x_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} \sin x_k$ за $n > 1$. Израчунати (ако постоји) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Решење. Индукцијом се показује да је $x_n \in (0,\pi)$ за свако $n \in \mathbb{N}$. Како је $nx_n - (n-1)x_{n-1} = \sin x_n$, то је $x_n - x_{n-1} = \frac{\sin x_n - x_n}{n} \leqslant 0$, па је низ опадајући. Следи, конвергира и за његов лимес важи $x = \sin x$ на основу Кошијеве теореме. Коначно, закључујемо $x = 0$.