Зимски семестар 2021/2022 Вежбе из Анализе 1
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Седма недеља

1.1 Низови

Дефиниција 1. Низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ је Кошијев ако важи

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall m\geqslant n\geqslant n_0 \implies |x_m-x_n|<\varepsilon),$$
$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in\mathbb{N})(\forall n\geqslant n_0, \forall p\in\mathbb{N} \implies |x_{n+p}-x_n|<\varepsilon).$$

Теорема. Сваки конвергентан низ је Кошијев. У комплетном метричком простору сваки Косхијев низ конвергира.

1. Доказати да низ $a_n = 1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$ конвергира.

Решење. Еквивалентно, показаћемо да је низ Кошијев у $\mathbb{R}$:

$$|a_{n+p}-a_n|\leqslant \frac{1}{n(n+1)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

2. Доказати да низ $a_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$ конвергира.

Решење. Еквивалентно, показаћемо да је низ Кошијев у $\mathbb{R}$:

$$|a_{n+p}-a_n|\leqslant \frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{2^{(n+p)}}=\frac{1}{2^{n+1}}\frac{1-(\frac{1}{2})^p}{1-\frac{1}{2}}<\frac{1}{2^n}<\varepsilon.$$

3. Доказати да низ $a_n=\frac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{\cos n!}{n(n+1)}$ конвергира.

Решење. Еквивалентно, показаћемо да је низ Кошијев у $\mathbb{R}$:

$$|a_{n+p}-a_n|\leqslant \frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}<\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n+1}<\varepsilon.$$

4. Доказати да низ $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ дивергира.

Решење. Еквивалентно, показаћемо да низ није Кошијев у $\mathbb{R}$. Нека је $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} \geqslant \frac{p}{n+p}.$$

Нека је $p = n$. Тада је

$$|x_{2n} - x_n| \geqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

5. Доказати да низ $x_n = \frac{1}{\log 2} + \dots + \frac{1}{\log n}$ дивергира.

Решење. Еквивалентно, показаћемо да низ није Кошијев у $\mathbb{R}$. Нека је $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$.

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{\log n + 1} + \dots + \frac{1}{\log n + p} \geqslant \frac{p}{\log(n+p)} > \frac{p}{n+p}.$$

Нека је $p = n$. Тада је

$$|x_{2n} - x_n| \geqslant \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon.$$

6. Доказати да низ $x_n = p_0 + \frac{p_1}{10} + \dots + \frac{p_n}{10^n}$, $p_i \in \mathbb{N}$, $p_i \leqslant 9$ конвергира.

Решење. Низ је растући:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{p_{n+1}}{10^{n+1}} \leqslant 0.$$

Низ је ограничен одозго:

$$x_n \leqslant 9 + \frac{9}{10} + \dots + \frac{9}{10^n} = 9\frac{1 - \frac{1}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}} = 10 - 10^n < 10.$$

Монотон и ограничен низ конвергира.

7. Доказати да низ $x_n = (1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{4}) \dots (1 + \frac{1}{2^n})$.

Решење. Низ је растући:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1.$$

Низ је ограничен одозго:

$$\ln x_n = \ln(1 + \frac{1}{2}) + \ln(1 + \frac{1}{4}) + \dots + \ln(1 + \frac{1}{2^n}) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \ln(1 + \frac{1}{2^n}) = \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 1,$$

$$x_n < e.$$

Низ је монотон и ограничен, па конвергира.

8. Нека је дат низ: $x_1 = \sqrt{2}$, $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{\cdots + \sqrt{2}}}$. ($n$ корена). Доказати да конвергира и наћи лимес.

Решење. Низ је растући, што се показује индукцијом. Важи $x_1 < x_2$. Претпоставимо да важи $x_n < x_{n+1}$. Тада је и $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + x_{n+1}} = x_{n+2}$. Низ је ограничен одозго са 2, што се такође проверава индукцијом. Важи $x_1 < 2$. Претпоставимо да је $x_n < 2$. Тада је и $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n} < \sqrt{2 + 2} = 2$.

9. Нека је $2 < a_1 < 3$ и $5a_{n+1} = a_n^2 + 6$. Доказати да низ конвергира и наћи лимес.

Решење. Докажимо да је низ ограничен (индукцијом). Важи $2 < a_1 < 3$. Претпоставимо да је $2 < a_n < 3$. Тада је и $a_{n+1} = \frac{a_n^2+6}{5} \in (2, 3)$. Низ је опадајући: $a_{n+1} - a_n = \frac{(a_n-2)(a_n-3)}{5} < 0$. Следи, низ конвергира. Проласком лимесом кроз једнакост $5a_{n+1} = a_n^2 + 6$ имамо $a^2 - 5a + 6 = 0$. Због описаних својстава низа, мора бити $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

10. Нека је $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \frac{4x_n+2}{x_n+3}$. Доказати да низ конвергира и наћи лимес.

Решење. Низ је добро дефинисан (индукцијом се показује да је $x_n > 0$). Низ је ограничен одозго са 4 (индукцијом). Низ је растући, што се такође проверава индукцијом. Дакле, низ конвергира и $x = \frac{4x+2}{x+3}$, одакле мора бити $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$.