Задатак 5

① Нека је функција f холоморфна у области $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $z \in \Omega$ и

$$g(w) = \begin{cases} \dfrac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{, ако је } w \in \Omega \setminus \{z\} \\ f'(z) & \text{, ако је } w = z \end{cases}$$

Доказати да је функција g холоморфна у области Ω.

Функција g је холоморфна на $\Omega \setminus \{z\}$ као композиција холоморфних. Треба само доказати холоморфност у z.

Ω област (отворен и повезан) $\Rightarrow (\exists R>0)\ D(z,R) \subseteq \Omega$.

f холоморфна у $D(z,R) \Rightarrow f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-z)^n$

(Тејлоров развој око тачке z)

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (w-z)^n \ , \ f(z) = a_0$$

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$$

$$f(w) - f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w-z)^n = a_1(w-z) + a_2(w-z)^2 + \dots$$

$$\frac{f(w)-f(z)}{w-z} = a_1 + a_2(w-z) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (w-z)^{n-1} = h(w)$$

h је холоморфна на $D(z,R)$ јер је представљена ст. редом

$$g(z) = f'(z) \ , \ h(z) = a_1 \ , \ f'(z) = a_1 \Rightarrow f'(z) = \underline{g(z) = h(z)}$$

$\Rightarrow g(w) = h(w) \ \forall w \in D(z,R)$

$\Rightarrow g$ је холоморфна на $D(z,R)$

$\Rightarrow$ $\underline{g \text{ је холоморфна у } z}$

② Нека је f цела функција. Пр. да постоји $r>0$ и $M>0$ тако да је

$$|f(z)| \leq M\cdot|z|^{n_0} \quad \text{за свако } z \text{ тд. } |z|\geq r \quad (n_0\in\mathbb{N} \text{ фиксиран})$$

Доказати да је тада f полином степена не већег од n_0.

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Тејлоров развој за f на $\mathbb{C}$

$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz$ γ_R кружница са центром 0 и полупречником $R>r$

$\gamma_R(t)=e^{it}\cdot R$, $t\in[0,2\pi]$

$$|a_n| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right| \underset{\text{ОЦН}}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_R}\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}|dz|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\cdot M\int_{\gamma_R}\frac{|z|^{n_0}}{|z|^{n+1}}|dz| = \frac{1}{2\pi}\cdot M\cdot\frac{R^{n_0}}{R^{n+1}}\cdot l(\gamma_R)$$

$$= \frac{M}{\cancel{2\pi}}\frac{1}{R^{n-n_0+1}}\cdot\cancel{2}R\cancel{\pi} = M\cdot\frac{1}{R^{n-n_0}}$$

за $n>n_0$ је $\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R^{n-n_0}}=0$ па је $a_n=0$

$$\Rightarrow \quad \underline{f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_{n_0}z^{n_0}}$$

③ Доказати да важи:

$$\int_0^{2\pi} (2\cos x)^{2n}\,dx = 2\pi\binom{2n}{n} \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

$$I=\int_0^{2\pi}(2\cos x)^{2n}dx = \int_0^{2\pi}(e^{ix}+e^{-ix})^{2n}dx$$

смена: $z=e^{ix}$

$dz = i\cdot e^{ix}dx = iz\,dx$

$dx = \frac{dz}{iz}$

$$I=\int_\gamma\left(z+\frac{1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{iz} = \int_\gamma\left(\frac{z^2+1}{z}\right)^{2n}\frac{dz}{iz}$$

γ кружница са центром 0 и пол. 1 (поз. оријентисана)

$$I=\frac{1}{i}\cdot\int_\gamma\frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}dz$$

$f(z)=(z^2+1)^{2n}$ је холоморфна фја на $\mathbb{C}$

$$\underset{\text{КИФ}}{\Longrightarrow} \quad f^{(2n)}(0)=\frac{(2n)!}{2\pi i}\int_\gamma\frac{(z^2+1)^{2n}}{z^{2n+1}}dz$$

$$\Rightarrow \quad I=\frac{1}{i}\cdot\frac{2\pi i}{(2n)!}\cdot f^{(2n)}(0) = \frac{2\pi}{(2n)!}f^{(2n)}(0)$$

Тејлоров развој за f (око 0): $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}z^n$

Треба још да одредимо $f^{(2n)}(0)\cdot\frac{1}{(2n)!}$.

$\frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}$ коефицијент уз z^{2n} у Тејлоровом развоју

$$(z^2+1)^{2n}=\binom{2n}{0}(z^2)^{2n}+\binom{2n}{1}(z^2)^{2n-1}+\dots+\binom{2n}{2n}(z^2)^0$$

биномна формула

$\binom{2n}{n}(z^2)^n$ се појављује у изразу и коефицијент уз z^{2n} је $\binom{2n}{n}$.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{I=2\pi\cdot\binom{2n}{n}}$$

④ Нека је $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција, при чему важи

$$\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq r^{\frac{37}{5}}, \text{ за све } 0<r<\infty.$$

Доказати да је $f=0$ у $\mathbb{C}$. $(f(z)=0, \forall z \in \mathbb{C})$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ Тејлоров развој око $z=0$

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$, γ_r кружница са центром 0, пол. r (позитивно фрјентисана)

$\gamma_r(\theta) = re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi]$

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right| \underset{\text{ОИН}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}} |dz| = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{r^{n+1}} \int_{\gamma_r} |f(z)| |dz|$$

$$= \frac{1}{2\pi r^{n+1}} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| |r i e^{i\theta}| d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi r^n} \cdot r^{\frac{37}{5}} = \frac{1}{2\pi} r^{\frac{37}{5}-n}$$

За $n < \frac{37}{5}$ тј. $n \leq 7$ је $\lim_{r \to 0} r^{\frac{37}{5}-n} = 0$ па је $a_n = 0$ (за $n \leq 7$)

За $n > \frac{37}{5}$ тј. $n \geq 8$ је $\lim_{r \to \infty} r^{\frac{37}{5}-n} = 0$ па је $a_n = 0$ (за $n \geq 8$)

Дакле, $a_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$

$\Rightarrow$ $\boxed{f=0 \text{ на } \mathbb{C}}$