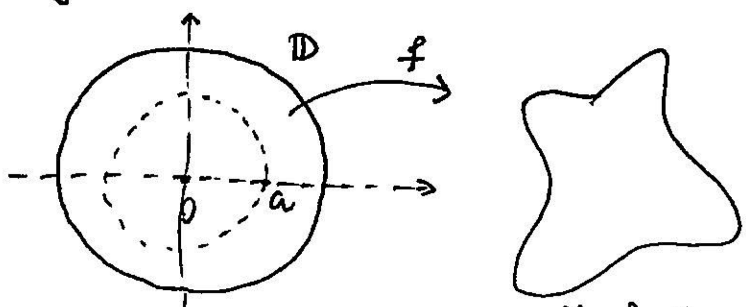
$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

(5) Дата је холоморфна функција $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ и нека је $\gamma(t) = f(ae^{it})$, $t \in [0, 2\pi]$, при чему важи $0 < a < 1$. Доказати да је $\ell(\gamma) \geq 2\pi a \cdot |f'(0)|$.

$\gamma_a(t) = a \cdot e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$$f'(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a} \frac{f'(z)}{z} dz \quad (\text{КИФ})$$

јер је f хол. на околини од γ_a



$\gamma = f \circ \gamma_a$

$\gamma_a(t) = ae^{it}$

кружница пол. a

$$\ell(\gamma) = \int_\gamma |dz| = \int_0^{2\pi} |\gamma'(t)| dt = \int_0^{2\pi} |f'(ae^{it})| \cdot |aie^{it}| dt$$

$$= \int_0^{2\pi} |f'(\gamma_a(t))| \, |\gamma_a'(t)| dt = \int_{\gamma_a} |f'(z)| |dz| \quad (**)$$

$$|f'(0)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_a} \frac{f'(z)}{z} dz \right| \underset{\text{ОИН}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_a} \frac{|f'(z)|}{|z|} |dz| \overset{|z|=a \text{ на } \gamma_a}{=} \frac{1}{2a\pi} \int_{\gamma_a} |f'(z)| |dz| \overset{(**)}{=} \frac{1}{2a\pi} \ell(\gamma)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell(\gamma) \geq 2a\pi |f'(0)|}$$

(6) Нека је $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ цела функција, при чему важи $f(0) = 3$ и $f'(0) = 1$. Израчунати:

$$\int_0^{2\pi} f(e^{ix}) \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx.$$

$$I = \int_0^{2\pi} f(e^{ix}) \cdot \frac{1 + \cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f(e^{ix}) \cdot \left(1 + \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) dx$$

смена: $z = e^{ix}$

$dz = ie^{ix} dx = iz\,dx$

$x \mapsto e^{ix}$ слика $[0, 2\pi]$ на једин. круж. γ са центром 0 (позитивно орј.)

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int_\gamma f(z) \cdot \left(1 + \frac{z + \frac{1}{z}}{2}\right) \frac{dz}{iz}$$

$$I = \frac{1}{4i} \cdot \int_\gamma \frac{f(z)}{z} \left(2 + z + \frac{1}{z}\right) dz$$

$$I = \frac{1}{4i} \cdot \left(2 \int_\gamma \frac{f(z)}{z} dz + \underbrace{\int_\gamma f(z) dz}_{= 0 \ (\text{Кошијева Т})} + \int_\gamma \frac{f(z)}{z^2} dz \right)$$

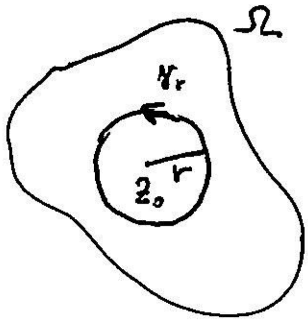
<u>КИФ</u>: $f(0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z}\,dz$, $f'(0) = \frac{1!}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z^2}\,dz$

$$\Rightarrow \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z}\,dz = 2i\pi \cdot f(0) = 6i\pi \ , \ \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{z^2}\,dz = 2\pi i f'(0) = 2i\pi$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{4i}\cdot\left(2\cdot 6i\pi + 0 + 2i\pi\right) = \frac{14i\pi}{4i} = \frac{7\pi}{2}.$$

! (7) Нека је функција f холоморфна у области $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ и $\overline{D}(z_0,r) \subset \Omega$.
Доказати да важи:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})\,dt.$$ (својство средње вредности за холом. фју)



Нека је γ_r поз. орј. кружница која је граница $D(z_0,r)$

$$\gamma_r = \partial D(z_0,r)$$

$$\gamma_r(t) = z_0 + re^{it} \ , \ t\in[0,2\pi]$$

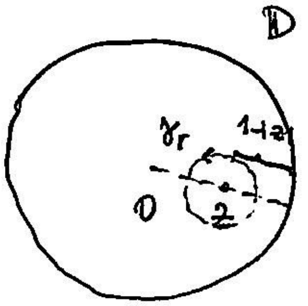
КИФ: $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int\limits_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi \cancel{i}}\cdot\int\limits_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})}{\cancel{r}\cancel{e^{it}}}\cdot\cancel{r}\cdot\cancel{i}\,\cancel{e^{it}}\,dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(z_0+re^{it})\,dt$$

⑧ Нека је $f: \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ холоморфна, при чему важи $|f(z)| \leq \frac{M}{(1-|z|)^n}$ $\forall z \in \mathbb{D}$, где је $n \in \mathbb{N}$ и $M>0$. Доказати да важи:

$$|f'(z)| \leq \frac{2^{n+1} \cdot M}{(1-|z|)^{n+1}}, \ \forall z \in \mathbb{D}.$$



$z \in \mathbb{D}$ произвољно и фиксирано

Да бисмо применили КИФ треба нам крива која обилази z и садржана је у $\mathbb{D}$! Узмимо кружницу са центром z полупречника $r = \frac{1-|z|}{2}$

$$\gamma_r = \partial D(z,r)$$

Проверимо да ли је $\overline{D}(z,r) \subseteq \mathbb{D}$:

$w \in \overline{D}(z,r)$ произвољно

$$\Rightarrow \ |w-z| \leq r \qquad , |w-z| \geq |w|-|z|$$

$$\Rightarrow \ |w| \leq |w-z|+|z| \leq r+|z| = \frac{1-|z|}{2}+|z| = \frac{1+|z|}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \ w \in \mathbb{D}$$

Можемо применити, дакле, КИФ на γ_r и f:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw$$

$$|f'(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \underset{\text{ОИН}}{\leq} \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{|f(w)|}{|w-z|^2} |dw|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{M}{(1-|w|)^n \cdot |w-z|^2} |dw| \underset{\substack{|w-z|=r \\ \text{на } \gamma_r}}{=} \frac{M}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{1}{(1-|w|)^n \cdot r^2} |dw| \leq \frac{M}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{1}{r^{2+n}} |dw|$$

за $|w-z|=r$ је $|w| \leq |w-z|+|z| = r+|z|$

па је $|w| \leq r+1-2r = 1-r$ тј. $1-|w| \geq r$

$$= \frac{M}{2\pi r^{n+2}} \cdot \ell(\gamma_r)$$

$$= \frac{M}{2\pi r^{n+2}} \cdot 2r\pi$$

$$\Rightarrow |f'(z)| \leq \frac{M\cancel{\pi}\cdot 2r}{\cancel{2\pi}\, r^{n+2}} = \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M\cdot 2^{n+1}}{(1-|z|)^{n+1}}$$

(9) За свако $n\in\mathbb{N}$ означимо са X_n скуп свих холоморфних ф-ја $f:\mathbb{D}\to\mathbb{C}$ за које важи $\sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \left((1-|z|)^n\right)|f(z)|<\infty$.

Доказати да за све $n\in\mathbb{N}$ важи $f\in X_n$ акко $f'\in X_{n+1}$.

Треба да докажемо два смера.

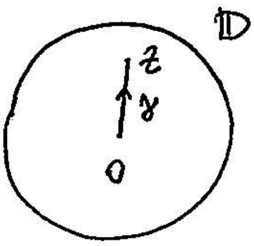
$\Rightarrow$: $f\in X_n$ тј. $\underbrace{\sup\limits_{z\in\mathbb{D}} \left((1-|z|)^n\right)|f(z)|}_{= M}<\infty$

$$(1-|z|)^n\cdot|f(z)|\leq M,\ \forall z\in\mathbb{D} \quad \text{тј.} \quad |f(z)|\leq\frac{M}{(1-|z|)^n}$$

$$\underset{\text{зад. (8)}}{\Longrightarrow} \quad |f'(z)|\leq\frac{2^{n+1}\cdot M}{(1-|z|)^{n+1}} \Rightarrow f'\in X_{n+1}$$

$\Leftarrow$: $f'\in X_{n+1}$ тј. $\underbrace{\sup\limits_{z\in\mathbb{D}} (1-|z|)^{n+1}\cdot|f'(z)|}_{= m}<\infty$

$$(1-|z|)^{n+1}\cdot|f'(z)|\leq m \quad \forall z\in\mathbb{D} \quad \text{тј.} \quad |f'(z)|\leq\frac{m}{(1-|z|)^{n+1}} \quad \forall z\in\mathbb{D}.$$



Нека је γ дуж која спаја 0 и z тј.

$$\gamma(t)=0+(z-0)\cdot t=zt,\ t\in[0,1]$$

$$|f(z)-f(0)|=\Big|\int_\gamma f'(w)\,dw\Big| \underset{\text{ОИН}}{\leq} \int_\gamma |f'(w)|\,|dw|$$

$$\leq\int_\gamma\frac{m}{(1-|w|)^{n+1}}|dw| = \int_0^1\frac{m}{(1-t|z|)^{n+1}}\cdot|z|\,dt = \begin{pmatrix}\text{смена:}\\ s=|z|t\\ z\ \text{фиксирано}\end{pmatrix}$$

$$= m\cdot\int_0^{|z|}\frac{ds}{(1-s)^{n+1}} = m\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{(1-s)^n}\Big|_0^{|z|} = \frac{m}{n}\left(\frac{1}{(1-|z|)^n}-1\right)$$

$$\Rightarrow \quad |f(z)-f(0)| \leq \frac{m}{n}\left(\frac{1}{(1-|z|)^n}-1\right) \leq \frac{m}{(1-|z|)^n}$$

$$|f(z)| = |f(z)-f(0)+f(0)| \leq |f(z)-f(0)| + |f(0)| \leq \frac{m}{(1-|z|)^n} + |f(0)|$$

$$\leq \frac{m+|f(0)|\cdot(1-|z|)^n}{(1-|z|)^n}$$

$$\leq \frac{m+|f(0)|}{(1-|z|)^n} = \frac{c}{(1-|z|)^n}$$

$$\Rightarrow f \in X_n$$

Дакле, важи еквиваленција.