$$H(\Omega)=\{f:\Omega\to\mathbb{C} \mid f \text{ холоморфна}\}$$

Кошијева теорема и Кошијева интегрална формула

Кошијева т.

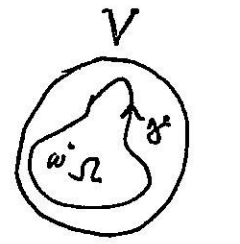
(Т1) Нека је γ затворена и део по део глатка крива у просто повезаној области Ω и $f\in H(\Omega)$. Тада важи:

$$\int_\gamma f(z)\,dz=0$$

Кошијева и.ф. (КИФ)

(Т2) Нека је функција f холоморфна у неком отвореном скупу који садржи затворене ограничене области $\Omega\subseteq\mathbb{C}$, чија је граница затворена, позитивно оријентисана и део по део глатка крива γ. Ако је $\omega\in\Omega$ и $n\in\mathbb{N}_0$, тада важи:

$$f^{(n)}(\omega)=\frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\omega)^{n+1}}\,dz.$$



$f\in H(V),\ V\supseteq\overline{\Omega}$

$$f(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-\omega}\,dz \quad (\text{за } n=0,\ 0!=1)$$

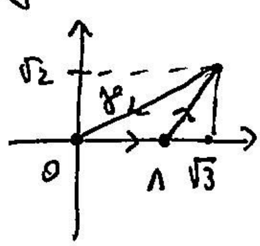
$$f'(\omega)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-\omega)^2}\,dz \quad (\text{за } n=1)$$

$$\vdots$$

(Из Т2 следи: f холом $\Rightarrow$ f бесконачно диф.)

(1) Израчунати $\int_\gamma e^{-z^2}dz$, при чему је γ позитивно оријентисана граница троугла чија су темена $\sqrt{3}+i\sqrt{2}$, 0 и 1.

$$I=\int_\gamma e^{-z^2}dz$$

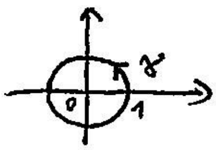


$f(z)=e^{-z^2}$ холоморфна на $\mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ просто повезана

γ затворена део по део глатка крива

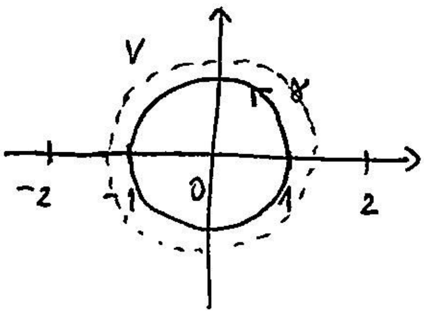
$$\overset{}{\underset{(\text{Т1})}{\Longrightarrow}}\ I=0$$

② Израчунати $I = \int_\gamma \frac{e^z}{z^2+2z}\,dz$ при чему је γ позитивно оријентисана кружница са центром 0 и полупречником 1.



$\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2+2z} = \frac{e^z}{z(z+2)}$$



f је холом. на $\mathbb{C} \setminus \{-2, 0\}$

$g(z) = \frac{e^z}{z+2}$ је холоморфна на околини јед. диска V (испрекидано нацртана)

$$\text{КИФ} \Rightarrow \quad I = \int_\gamma \frac{g(z)}{z}\,dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{z-0}\,dz = \frac{2\pi i}{0!}\,g(0)$$

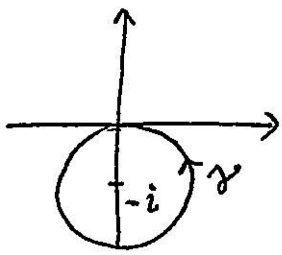
$$\left(g(0) \overset{\text{КИФ}}{=} \frac{0!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(z)}{z-0}\,dz \right)$$

$$I = 2\pi i \cdot \frac{e^0}{0+2} = \pi i$$

③ Израчунати:

$I = \int_\gamma \frac{\cos z}{z+i}\,dz$, при чему је $\gamma(t) = -i + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. (позит. оријент.)

$f(z) = \cos z$ је холоморфна на $\mathbb{C}$ (па и на околини криве γ)



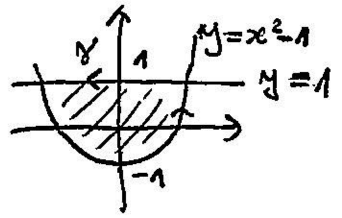
$$\overset{\text{КИФ}}{\Rightarrow} \quad \frac{0!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-(-i)}\,dz = f(-i)$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_\gamma \frac{\cos z}{z+i}\,dz = f(-i) \cdot 2\pi i = \cos(-i) \cdot 2\pi i$$

$$\cos(-i) = \frac{e^{i(-i)} + e^{-i(-i)}}{2} = \frac{e + e^{-1}}{2}$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{e + \frac{1}{e}}{2} \cdot 2\pi i = i\pi\left(e + \frac{1}{e}\right)$$

④ Израчунати $\int_\gamma \frac{\cos z}{z^3}\,dz$ при чему је γ позитивно оријентисана граница области ограничене кривама $y=1$ и $y=x^2-1$.



$f(z)=\cos z$ је холоморфна на околини криве γ

$$\frac{2!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-0)^3}\,dz \overset{\text{КИФ}}{=} f''(0)$$

$$I=\int_\gamma \frac{\cos z}{z^3}\,dz=\frac{2\pi i}{2}\cdot f''(0)=i\pi\cdot f''(0)$$

$$f(z)=\cos z\ ,\ f'(z)=-\sin z\ ,\ f''(z)=-\cos z$$

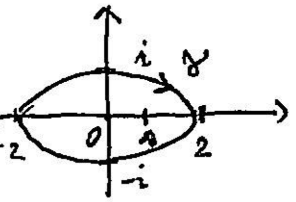
$$f''(0)=-\cos 0=-1$$

$$\Rightarrow I=i\pi(-1)=-i\pi$$

⑤ Израчунати $\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz$ при чему је γ негативно оријентисана крива чија је једначина $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{1}=1$.

$f(z)=\dfrac{e^z}{z(1-z)^3}$ је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\{0,1\}$

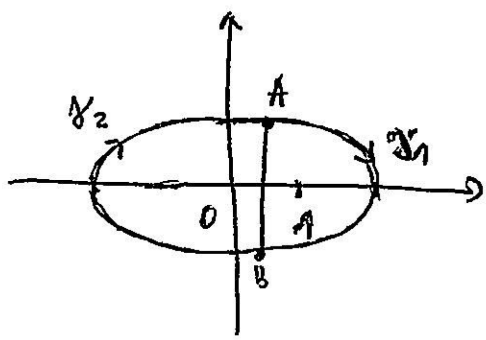
$$\int_\gamma f(z)\,dz=\int_{\gamma_1} f(z)\,dz+\int_{BA} f(z)\,dz+\int_{\gamma_2} f(z)\,dz+\int_{AB} f(z)\,dz$$



$\Gamma_1=\gamma_1\cup BA\ ,\ \Gamma_2=AB\cup\gamma_2$

$$I_1=\int_{\Gamma_1}\frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz$$

$$I_2=\int_{\Gamma_2}\frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz$$



$$I_1 = \int_{\Gamma_1} \frac{-\frac{e^z}{z}}{(z-1)^3}\, dz$$

$g_1(z) = \frac{-e^z}{z}$ је холоморфна на околини Γ_1 (та околина се узме довољно мала да не садржи 0)

$$\underset{\text{КИФ}}{\Longrightarrow} \quad \frac{2!}{2\pi i} \int_{\Gamma_1^+} \frac{g_1(z)}{(z-1)^3}\, dz = g_1''(1)$$

, али овде је Γ_1 позитивно оријентисана (у КИФ)

$$\int_{\Gamma_1} \frac{g_1(z)}{(z-1)^3}\, dz = -\int_{\Gamma_1^+} \frac{g_1(z)}{(z-1)^3}\, dz = -g_1''(1) \cdot \pi i$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\Gamma_1} \frac{g_1(z)}{(z-1)^3}\, dz = e i\pi$$

$$g_1'(z) = \frac{-e^z z + e^z}{z^2}$$

$$g_1''(z) = e^z \frac{1-z}{z^2} + e^z \cdot \frac{-z^2 - 2z(1-z)}{z^4}$$

$$\boxed{g_1''(1) = -e}$$

$$I_2 = \int_{\Gamma_2} \frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}}{z}\, dz$$

$g_2(z) = \frac{e^z}{(1-z)^3}$ је холоморфна на околини Γ_2 (узме се довољно мала да не садржи 1)

$$\underset{\text{КИФ}}{\Longrightarrow} \quad \frac{0!}{2\pi i} \int_{\Gamma_2^+} \frac{g_2(z)}{z}\, dz = g_2(0)$$

$$, \quad g_2(0) = \frac{e^0}{1} = 1$$

$$\int_{\Gamma_2^+} \frac{g_2(z)}{z}\, dz = 1 \cdot 2\pi i$$

$$\Rightarrow \quad \int_{\Gamma_2} \frac{g_2(z)}{z}\, dz = -2i\pi$$

Коначно, $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\, dz = e i\pi - 2i\pi = (e-2) i\pi$