1 час, Фуријеови редови

Систем функција $\frac{1}{2}$, $\cos\frac{k\pi x}{l}$, $\sin\frac{k\pi x}{l}$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in [-l,l]$, се назива основним тригонометријским системом. Он је ортогоналан на $[-l,l]$. Нека је $f : [-l,l] \to \mathbb{R}$ интеграбилна функција на $[-l,l]$. Бројеви $a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx$, $a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx$, $a_k = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx$, се зову Фуријеови коефицијенти функције f у односу на основни тригонометријски систем. Тригонометријски ред $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l})$ је Фуријеов ред функције f.
Нека је део по део глатка функција f на сегменту $[-l,l]$ са периодом $2l$ продужена на целу бројну праву. Тада тригонометријски Фуријеов ред функције f конвергира у свакој тачки $x \in \mathbb{R}$ ка вредности $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$.
Ако део по део глатка функција f на сегменту $[-l,l]$ још задовољава и једнакост $f(-l) = f(l)$, онда њен тригонометријски Фуријеов ред конвергира равномерно на том сегменту и његова сума је једнака $f(x)$ за свако $x \in [-l,l]$.
Фуријеов ред Риман-интеграбилне функције на сегменту $[-l,l]$ се може на том сегменту интегралити члан по члан.
Нека $f \in C^m[-l,l]$ и $f(-l) = f(l)$, $f'(-l) = f'(l)$, $\ldots$ $f^{(m)}(-l) = f^{(m)}(l)$. Нека поред тога функција f има на сегменту $[-l,l]$ део по део непрекидан извод реда $m+1$. Тада:
1. конвергира бројни ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{k\pi}{l})^m(|a_k| + |b_k|)$,
2. Фуријеов ред такве функције можемо на датом сегменту диференцирати члан по члан m пута.

1. Нека је $c \in \mathbb{R}$, $l > 0$ и $0 < \xi_1 < \cdots < \xi_n < \ldots$ низ решења једначине $\tan l\xi = c\xi$. Доказати да је систем функција $\{\sin\xi_n x : n \in \mathbb{N}\}$ ортогоналан у $C[0,l]$.

Треба показати да је $\int\limits_0^l \sin\xi_n x\sin\xi_m x dx = 0$ за $n \neq m$ и да је $\int\limits_0^n \sin^2\xi_n dx \neq 0$. Применом адиционих формула $\sin\xi_n x\sin\xi_m x = \frac{1}{2}(\cos{(\xi_n - \xi_m)}x - \cos{(\xi_n + \xi_m)}x)$, добија се $\int\limits_0^l \sin\xi_n x\sin\xi_m x dx = \frac{1}{2}\frac{\sin{(\xi_n-\xi_m)}l}{\xi_n-\xi_m} - \frac{1}{2}\frac{\sin{(\xi_n+\xi_m)}l}{\xi_n+\xi_m} = \frac{c}{2}\frac{\sin{(\xi_n-\xi_m)}l}{\tan\xi_n-\tan\xi_m} - \frac{c}{2}\frac{\sin{(\xi_n+\xi_m)}l}{\tan\xi_n+\tan\xi_m} = \frac{c}{2}(\frac{\sin{(\xi_n-\xi_m)}l\cos l\xi_n\cos l\xi_m}{\sin l\xi_n\cos l\xi_m - \sin l\xi_m\cos l\xi_n} - \frac{\sin{(\xi_n+\xi_m)}l\cos l\xi_n\cos l\xi_m}{\sin l\xi_n\cos l\xi_m + \sin l\xi_m\cos l\xi_n}) = \frac{c}{2}(\cos l\xi_n\cos l\xi_m -$

$\cos l\xi_n \cos l\xi_m) = 0$, за $m \neq n$. Ако је $m = n$, добија се $\int\limits_0^l \sin^2 \xi_n dx > 0$.

2. Доказати да тригонометријски ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ не може бити Фуријеов ред ниједне део по део непрекидне функције на $[-\pi, \pi]$.

Претпоставимо супротно. Тада важи Парсеваловала једнакост $\frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Међутим, лева страна је коначна, а десна није. Контрадикција.

3. Разложити у Фуријеов ред периодичну функцију основне периоде 2π која је на сегменту $[-\pi, \pi]$ одређена формулом

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq x < 0, \\ -1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Фуријеов ред задате функције у свим тачкама у којима је непрекидна конвергира ка вредности саме функције, док и нули и на крајевима сегмента $[-\pi, \pi]$ конвергира ка $\frac{f(x_0-0)+f(x_0+0)}{2}$, где је $x = 0, \pm\pi$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{o} dx + \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} (-1)dx = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0, n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{n\pi}((-1)^n - 1), n \geq 1.$$

4. Разложити у Фуријеов ред функцију на интервалу $(0, 2l)$

$$f(x) = \begin{cases} A, & 0 \leq x < l, \\ 0, & l \leq x < 2l. \end{cases}$$

Слично претходном задатку, рачунају се коефицијенти:

$$a_0 = A,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l} = 0, n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l} = \frac{A}{n\pi}((-1)^{n+1}+1), n \geq 1.$$

5. Функцију $f(x) = x - [x]$ разложити у Фуријеов ред.

Функција је 1-периодична, непрекидно-диференцијабилна изузев у целобројним тачкама где има прекиде прве врсте. Дакле, можесе развити у Фуријеов ред $a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2n\pi x + b_n \sin 2n\pi x$. Овај ред конвергира ка $f(x)$ за $x \neq k$, односно ка $\frac{1}{2}$ у целобројним тачкама.

$$a_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}}\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{1}(x-[x])dx = 2\frac{x^2}{2}|_0^1 = 1,$$

$$a_n = 2\int\limits_{0}^{1}(x-[x])\cos 2n\pi x dx = 2\int\limits_{0}^{1} x\cos 2n\pi x dx = \frac{1}{2n^2\pi}\cos(2n\pi x)|_0^1 = 0,$$

$$b_n = 2\int\limits_{0}^{1}(x-[x])\sin 2n\pi x dx = 2\int\limits_{0}^{1} x\sin 2n\pi x = -\frac{1}{n\pi} + \frac{\sin 2n\pi x}{2n^2\pi^2}|_0^1 = -\frac{1}{n\pi}.$$

6. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = |x|$ на интервалу $(-\pi, \pi)$.

Функција је непрекидна на $(-\pi, \pi)$ и има део по део непрекидан извод свуда са изузетком тачке $x = 0$. Са периодом 2π продужава се на целу реалну осу и може се развити у Фуријеов ред.

$$a_0 = \pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1), n \geq 1$$

$$b_n = 0, n \geq 1$$

јер је функција парна.

6. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = \sin ax$, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ на интервалу $(-\pi, \pi)$.

Због непарности функције је

$$a_n = 0, n \geq 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin ax \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^{n+1} n}{n^2 - a^2} \sin a\pi, |a| \neq n, n \geq 1.$$

7. Функцију $f(x) = \max\{\sin x, 0\}$ развити у Фуријеов ред на $(-\pi, \pi)$ и написати како гласи Парсевалова неједнакост.

$a_0 = \frac{2}{\pi}$, $a_n = \frac{1}{\pi} \frac{(-1)^n n - 1}{n^2 - 1}$, $n \geq 1$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_n = 0$, $n \geq 2$.

8. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = x^2$:
1. по косинусима,
2. по синусима,
3. на интервалу $(0, 2\pi)$.

Користећи добијено разлагање доказати да је $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

1. Функцију разматрану на $[-\pi, \pi]$ 2π-периодично продужимо на целу бројну праву. Тада добијамо непрекидну и део по део глатку функцију која се са датом функцијом поклапа на сегменту $[-\pi, \pi]$ и која се може разложити у Фуријеов ред по косинусима.

$$a_0 = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = (-1)^n \frac{4}{n^2}, n \geq 1$$

$$b_n = 0, n \geq 1.$$

2. Функцију разматрану на $[0, \pi]$ по непарности продужимо на $[-\pi, \pi]$ и 2π-периодично продужимо на целу бројну праву.

$$a_0 = 0,$$

$$a_n = 0, n \geq 1,$$

$$b_n = \frac{2\pi}{n}(-1)^{n+1} + \frac{4}{\pi n^2}((-1)^n - 1), n \geq 1.$$

3. Функцију разматрану на $[0, 2\pi]$ 2π-периодично продужимо на целу бројну праву.

$$a_0 = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{4}{n^2}, n \geq 1,$$

$$b_n = -\frac{4\pi}{n}, n \geq 1.$$

9. Разложити у Фуријеов ред функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 < x < 2, \\ 3 - x, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$a_0 = \frac{4}{3}$, $a_n = \frac{3}{\pi^2 n^2}(\cos\frac{2n\pi}{3} - 1)$, $b_n = 0$, $n \geq 1$.

10. Функцију $f(x) = x$, $0 < x < 2$ развити:
1. у Фуријеов синусни ред,
2. у Фуријеов косинусни ред,
3. Применити Парсевалову једнакост на Фуријеов ред добијен под 2. и на основу тога наћи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$
4. Наћи Фуријеов ред функције $x \to x^2$, $0 < x < 2$ интеграљењем Фуријеовог реда под 1. и на основу тога наћи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

1. $a_0 = 0$, $a_n = 0$, $b_n = -\frac{4}{n\pi}\cos n\pi$, $n \geq 1$,
2. $a_0 = 2$, $a_n = \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$, $n \geq 1$,
3. $S = \frac{\pi^4}{90}$,
4. $S = \frac{\pi^2}{12}$.

11. Разложити у Фуријеов ред функцију

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi, \\ 0, & x = -\pi, \pi, \end{cases}$$

$f(x + 2\pi) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Испитати његову конвергенцију и наћи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

$a_n = 0$, $n \geq 0$, $b_n = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}$, $n \geq 1$.

12. Разложити у Фуријеов ред функцију $f(x) = \sinh ax$, $-\pi \leq x \leq \pi$ и испитати његову конвергенцију.

$a_n = 0$, $n \geq 0$, $b_n = \frac{2\sinh a\pi}{\pi} \frac{(-1)^{n+1}n}{a^2+n^2}$.

13. Ако су a_n и b_n Фуријеови коефицијенти интеграбилне функције f са основним периодом 2π, одредити Фуријеове коефицијенте A_n и B_n функције Стеклова $f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$.

$A_0 = a_0$, $A_n = \frac{a_n \sinh nh}{nh}$, $B_n = \frac{b_n \sinh nh}{nh}$.