Зимски семестар 2021/2022 Вежбе из Анализе 1
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Четврта недеља

1.1 Важне неједнакости

1. Доказати неједнакост паралелограма:

$$|\sum_{k=1}^{n} a_i| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_i|.$$

Решење. За $n = 1$ важи једнакост, а случај $n = 2$ је неједнакост троугла. Претпоставимо да тврђење важи за n и докажимо га за $n+1$:

$$|\sum_{k=1}^{n+1} a_i| = |\sum_{k=1}^{n} a_i + a_{n+1}| \leqslant |\sum_{k=1}^{n} a_i| + |a_{n+1}| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_i| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_i|.$$

2. Доказати Кошијеву неједнакост

$$(\sum_{k=1}^{n} a_i b_i)^2 \leqslant (\sum_{k=1}^{n} a_i^2)(\sum_{k=1}^{n} b_i^2).$$

Решење. Како је

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i x + b_i)^2 \geqslant 0,$$

то је дискриминанта непозитивна, одакле следи тражена неједнакост.

3. Доказати неједнакост средина $H_n \leqslant G_n \leqslant A_n \leqslant K_n$:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Решење. Неједнакост квадратне и аритметичке средине је последица Кошијеве неједнакости, док је неједнакост аритметичке и геометријске средине доказана раније. Неједнакост геометријске и хармонијске средине следи применом аритметичко-геометријске неједнакости на $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots \frac{1}{a_n}$.

4. Доказати Ацелову неједнакост: Ако је $a_1^2 > \sum_{i=2}^{n} a_i^2$ или $b_1^2 > \sum_{i=2}^{n} b_i^2$, онда

$$(a_1 b_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i b_i)^2 \geqslant (a_1^2 - \sum_{i=2}^{n} a_i^2)(b_1^2 - \sum_{i=2}^{n} b_i^2).$$

Решење. Посматрајмо непрекидну функцију

$$f(x) = (a_1 x - b_1)^2 - \sum_{i=2}^{n} (a_i x - b_i)^2.$$

Имамо да је $f(\frac{b_1}{a_1}) = 0$ и $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$. Дакле, f има бар један корен и дискриминанта је ненегативна, одакле следи тражена неједнакост.

5. Доказати неједнакости са елементарним функцијама:

$$\text{За } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ важи } \sin x < x < \tan x.$$

$$\text{За свако } x \in \mathbb{R} \text{ важи } |\sin x| \leqslant |x|.$$

Решење. Функција $f(x) = x - \sin x$ је растућа на $(0, \frac{\pi}{2})$ је њен први извод ненегативан, па је $f(x) \geqslant f(0) = 0$, одакле због непарности и 2π-периодичности синусне функције следи $|\sin x| \leqslant |x|$ за свако реално x (једнакост важи за $x = 0$). Функција $g(x) = \tan x - x$ има ненегативан први извод на $(0, \frac{\pi}{2})$, па је растућа и $g(x) \geqslant g(0) = 0$, одакле следи неједнакост $x < \tan x$.

Дефиниција 1. За функцију $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ кажемо да је конвексна ако за сваке две тачке $x_1, x_2 \in (a, b)$ и свака два ненегативна реална броја важи

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

Функција је конкавна ако важи

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \geqslant \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

6. Доказати Јенсенову неједнакост: Нека је $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ конвексна функција и нека су $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ ненегативни бројеви такви да је $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_i = 1$. Тада за све $x_1, x_2, \dots x_n \in (a,b)$ важи

$$f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Решење. За $n = 1$ и $n = 2$ неједнакост важи. Претпоставимо да важи за n и докажимо да важи за $n+1$: На основу дефиниције конвексности је

$$f(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1}) \leqslant f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}),$$

одакле је кори71ењем индуктивне хипотезе

$$f(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

7. Доказати Јангову неједнакост: Нека су p и q спрегнути индекси $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и u и v ненегативни реални бројеви.
Ако је $p > 1$ и $q > 1$, тада је

$$uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q},$$

при чему једнакост важи акко је $u^p = v^q$.
Акоје $p < 1$ и бројеви u, v су позитивни, тада је

$$uv \geqslant \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q},$$

при чему једнакост важи акко је $u^p = v^q$.

Решење. Следи из Јенсенове неједнакости за $n = 2$, експоненцијалну функцију и $\lambda_1 = \frac{1}{p}$, $\lambda_2 = \frac{1}{q}$, $x = u^p$, $y = v^q$.

8. Доказати Хелдерову неједнакост: Нека су p и q спрегнути индекси $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и нека су $x_1, x_2, \dots x_n, y_1, y_2, \dots y_n$ ненегативни реални бројеви.
Ако је $p > 1$, тада важи неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} y_i^q)^{\frac{1}{q}}).$$

Ако је $p < 1$, тада важи неједнакост

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \geqslant (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}} (\sum_{i=1}^{n} y_i^q)^{\frac{1}{q}}).$$

Једнакост у оба случаја важи акко је $\frac{x_1^p}{y_1^q} = \frac{x_2^p}{y_2^q} = \cdots = \frac{x_n^p}{y_n^q}$.

Решење. Доказаћемо прву неједнакост, доказ друге се аналогно изводи. Означимо са $X = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}}$ и $Y = (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}}$. Ако у Јанговој неједнакости заменимо $u = \frac{x_i}{X}$, $v = \frac{y_i}{Y}$, добијамо за $i = 1, 2 \ldots n$ да важи

$$\frac{x_i y_i}{XY} \leqslant \frac{1}{p}\frac{x_i^p}{X^p} + \frac{1}{q}\frac{y_i^q}{Y^q},$$

одакле сумирањем следи

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i y_i}{XY} \leqslant 1,$$

што је и требало извести.

9. Доказати неједнакост Минковског: Нека је $1 \leqslant p < \infty$. Тада важи

$$(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}} + (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p)^{\frac{1}{p}}.$$

Решење.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i + y_i)^{p-1} + \sum_{i=1}^{n} y_i(x_i + y_i)^{p-1},$$

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p \leqslant (\sum_{i=1}^{n} x_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p)^{\frac{1}{q}} + (\sum_{i=1}^{n} y_i^p)^{\frac{1}{p}}(\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p)^{\frac{1}{q}}.$$

Дељењем неједнакости са $(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^p)^{\frac{1}{q}}$ добија се жељена неједнакост.

10. Доказати Чебишовљеву неједнакост: Ако су $x_1, x_2, \ldots x_n$ и $y_1, y_2, \ldots y_n$ растући низови бројева, тада важе неједнакости

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+1-i} \leqslant (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i) \leqslant n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

при чему једнакости важе акко је $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ или $y_1 = y_2 = \cdots = y_n$.

Докажимо најпре десну неједнакост.

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i(n y_i - \sum_{j=1}^{n} y_j),$$

$$n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - (\sum_{i=1}^{n} x_i)(\sum_{i=1}^{n} y_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i(n y_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} (y_i - y_j)) = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i)(y_j - y_i).$$

За доказ десне неједнакости применити доказану неједнакост на (x_i) и $(-y_{n+1-i})$.

Решење.