1 Функционални редови

Нека ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира. Тада се његова сума може наћи по формули $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = \lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

1. Наћи суму реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n(n+1)}{n!}$.

Сума реда $x\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n!}$ је xe^{2x}. Диференцирањем члан по члан и пуштањем лимеса кад $x \to 1-0$, добија се $S = 3e^2$.

2. Наћи суму реда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$.

Посматрајмо функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2+n-2}$. Област конвергенције овог реда је $[-1,1]$, што се лако провери. Након краћег рачуна, добија се $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2+n-2} = \frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n-1} - \frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n+2} = x\ln(1+x) + \frac{\ln(1+x)}{3x^2} - \frac{1}{3x} + \frac{1}{6} - \frac{x}{9}$.
Узимајући $x = 1$, следи $S = \frac{2}{3}\ln 2 - \frac{5}{18}$.

3. Доказати да је функција $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ решење диференцијалне једначине $y^{(4)} - y = 0$.

Тривијално.

4. Дат је функционални ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^2} x}{a^{n^2}}$. Одредити за које вредности параметра a
1. функционални ред конвергира,
2. сума реда представља непрекидну функцију,
3. ред може да се диференцира члан по члан.

1. Како је $|f_n(x)| \le \frac{1}{a^{n^2}}$, а бројни ред конвергира за $a > 1$ према Даламберу, то на основу Вајерштрасовог критеријума ред равномерно конвергира за $a > 1$. За $a < 1$ општи члан не тежи нули, па у том случају ред дивергира.
2. За $a > 1$ ред је равномерно конвергентан и чува непрекидност.
3. Како је $|f_n'(x)| \le (\frac{2}{a})^{n^2}$, а бројни поредбени ред конвергира по Даламберу за $a > 2$, то се ред може диференцирати члан по члан за такве a.

5. Израчунати $\int\limits_0^1 (\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x e^{-nx}) dx$.

Како је $|f_n(x)| \leq f_n(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e(n-1)!}$, а бројни ред конвергира, то је посматрани функционални ред равномерно конвергентан на $[0, \infty)$ и интеграл и ред могу заменити места: $\int\limits_0^1 (\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} x e^{-nx}) dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \int\limits_0^1 x e^{-nx} dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1-e^{-n}(1+n)}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}}{n!} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{ne^{-n}}{n!}$. Коначно, сума реда је $e - e^{\frac{1}{e}} - \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e}$.

6. Представити интеграл $\int\limits_0^1 x^{-x} dx$ у облику реда.

Како је $x^{-x} = e^{-x \ln x} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n \ln^n x}{n!}$, а функција $|x \ln x|$ достиже максимум e^{-1}, то је ред равномерно конвергентан по Вајерштрасовом критеријуму. Дакле, може се интегралити члан по члан на $(0, 1]$. Како је

$$\int\limits_0^1 x^n \ln^n x dx = (-1)^n \frac{n!}{(n+1)^{n+1}},$$

то је

$$\int\limits_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}.$$

7. Разложити Лапласов интеграл $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx$ у степени ред по степенима $b > 0$, користећи чињеницу да је $\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx = \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2bx)^n}{(2n)!} dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2b)^{2n}}{(2n)!} \int\limits_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2b)^{2n}}{(2n)!} I_n$. Парцијалном интеграцијом се налази $I_n = \frac{2n-1}{2} I_{n-1}$ уз почетни услов $I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, одакле је $I_n = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\pi}$. Следи $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$. Оправданост интеграције следи из равномерне конвергенције реда на произвољном сегменту $[0, A]$.

8. Испитати равномерну конвергенцију функциионалног низа $f_n(x) = e^{n \frac{1-x}{x}}$ на скуповима $E_1 = (1, \infty)$, $E_2 = (\delta, \infty), \delta > 1$.

Како је $\sup_{x\in E_1}|f_n(x)| = f_n(1) = 1 \neq 0$, то је низ неравномерно конвергентан нули на првом скупу, а како $\sup_{x\in E_2}|f_n(x)| = f_n(\delta) \to 0$, кад $n \to \infty$, то је равномерно конвергентан на другом скупу.

9. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-x^2n^6}\sin(n^3x)$ на скуповима $(0,\infty)$,(δ,∞), $\delta > 0$.

Како је $f_n(\frac{1}{n^3}) = \frac{\sin 1}{e} > 0$, низ не конвергира равномерно на скупу E_1. Због $|f_n(x)| < \frac{1}{\delta^2 n^6}$, низ равномерно конвергира на другом скупу по Вајерштрасовом критеријуму.

10. Израчунати интеграл $\int\limits_0^\infty \frac{x}{1+e^x}dx$.

$I = \int\limits_0^\infty x\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}e^{-nx}dx = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{1}{n^2} - \frac{(nx+1)e^{-nx}}{n^2}|_0^\infty) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$. Редови и интеграл могу заменити места јер се ради о равномерно конвергентним редовима за $x > 0$.