1 час, Степени редови

1. Доказати да је $\frac{1}{(1-x)^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, $|x| < 1$.

2. Разложити у степени ред по степенима x функцију $f(x) = \frac{x}{(1-x)(1-x^2)}$.

$f(x) = -\frac{1}{4} \sum\limits_{n=0}^{\infty} (2n + 1 + (-1)^{n+1})x^n$.

Функција је аналитичка у некој тачки ако се може представити у облику конвергентног степеног реда у околини те тачке.
Нека је $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ аналитичка функција у некој околини тачке (x_0, y_0, y_0'). Тада постоји јединствено решење Кошијевог задатка $y'' = f(x, y, y')$, $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$, дефинисано у некој околини тачке x_0 и оно је аналитичка функција у тој околини.
Тачка x_0 је регуларна тачка ДЈ ако су функције $p_1(x)$ и $p_2(x)$ аналитичке у тој тачки. Тачка x_0 је сингуларна тачка ДЈ ако бар једна од функција $p_1(x)$ и $p_2(x)$ није аналитичка у тачки x_0.
Ако су функције $p_1(x)$ и $p_2(x)$ аналитичке функције у области $|x - x_0| < R$, тада је свако решење ДЈ јединствена аналитичка функција у овој области.

3. Методом неодређених коефицијената одредити у облику степеног реда решење Кошијевог задатка $y' = x^2 + e^y$, $y(0) = 0$.

Означимо решење са $y(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k x^k$. Диференцирањем члан по члан се добија $y'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$, па сменом у ДЈ имамо

$$0 \equiv y'(x) - x^2 - e^{y(x)} = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} - x^2 - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} (\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k).$$

Изједначавањем коефицијената уз x^k, добија се

$$0 \equiv a_1 - 1 + (2a_2 - a_1)x + (3a_3 - 1 - a_2 - \frac{a_1^2}{2})x^2 + \dots$$

одакле је

$$y(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 + \dots .$$

4. Наћи оно решење диференцијалне једначине $y'' - xy = 0$ које се може приказати у облику степеног реда по степенима x и које задовољава почетне услове $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Означимо решење са $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Како је $y(0) = 1$, то је $a_0 = 1$. Диференцирањем члан по члан се добија

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

па сменом у ДЈ имамо

$$0 \equiv y''(x) - xy(x) = a_2 + (3 \cdot 2a_3 - 1)x + \sum_{k=2}^{\infty}((k+2)(k+1)a_{k+2} - a_{k-1})x^k.$$

Изједначавањем коефицијената уз x^k, добија се

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6) \cdots ((3n-1) \cdot 3n)}.$$

5. Решити ДЈ $y'' - x^2 y = 0$.

Означимо решење са $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Диференцирањем члан по члан се добија

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

па сменом у ДЈ имамо

$$0 \equiv y''(x) - x^2 y(x) = 2a_2 + (3 \cdot 2a_3)x + \sum_{k=2}^{\infty}((k+2)(k+1)a_{k+2} - a_{k-2})x^k.$$

Изједначавањем коефицијената уз x^k, добија се $y(x) = a_0 + a_1 x + a_0 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k}}{4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7 \cdots 4k(4k-1)} + a_1 \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{5 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 8 \cdots (4k+1)4k}$, $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

6. Методом степених редова одредити Кошијево решење у коначном облику једначине $y'' - xy' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Означимо решење са $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Диференцирањем члан по члан се добија

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

па сменом у ДЈ имамо

$$0 \equiv y''(x) - xy'(x) - 2y(x) = (2a_2 - 2a_0) + \sum_{k=1}^{\infty}((k+2)((k+1)a_{k+2} - a_k)x^k.$$

Изједначавањем коефицијената уз x^k и коришћењем почетних услова, добија се

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k k!} x^{2k+1} = xe^{\frac{x^2}{2}}.$$

7. У области $|x| < 1$ одредити опште решење ДЈ $(1-x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0$.

Означимо решење са $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Диференцирањем члан по члан се добија

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

па сменом у ДЈ имамо

$$0 \equiv (1-x^2)y''(x) - 6xy'(x) - 4y(x) = (a_2 - 4a_0) + (6a_3 - 10a_1) + \sum_{k=2}^{\infty}((k+2)(k+1)a_{k+2} - (k+1)(k+4)a_k$$

Изједначавањем коефицијената уз x^k и коришћењем почетних услова, добија се

$$y(x) = a_0 \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^{2k} + \frac{a_1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}(2k+3)x^{2k+1}.$$

8. Представити степеним редом опште решење нехомогене ДЈ $y'' + x^2y = 1 + x + x^2$.

Означимо решење са $y(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Диференцирањем члан по члан се добија

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1},$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^k$$

па сменом у ДЈ имамо

$$0 \equiv y''(x) + x^2 y(x) - 1 - x - x^2.$$

Изједначавањем коефицијената уз x^k и коришћењем почетних услова, добија се

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1-a_0}{12}x^4 - \frac{a_1}{20}x^5 - \frac{1}{60}x^+ \ldots,$$

$a_0, a_1 \in \mathbb{R}$.

9. Доказати да је функција $y = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{((2n)!!)^2}$ решење диференцијалне једначине $xy'' + y' + xy = 0$.

Лако се утврди диференцирањем реда и уврштавањем у ДЈ.

Сингуларну тачку x_0 зовемо регуларно-сингуларном тачком ако су функције $(x - x_0)p_1(x)$ и $(x - x_0)^2 p_2(x)$ аналитичке функције у тој тачки.

10. Испитати регуларност тачке $x = 0$ за $2x^2y'' + 7x(x+1)y' - 3y = 0$.

$x = 0$ је регуларно-сингуларна тачка.