Зимски семестар 2021/2022 Вежбе из Анализе 1
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Трећа недеља

1.1 Линеарне хомогене диференцне једначине са кораком 2 и 3

Нека је x_1, x_2 дато и
$$x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n,\ a, b \in \mathbb{R}.$$
Тада је карактеристична једначина
$$x^2 - ax - b = 0.$$

Нека су λ_1, λ_2 решења карактеристичне једначине.

Ако је $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то је
$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n,$$
при чему се C_1, C_2 одређују из почетних услова.

Ако је $\lambda_1 = \lambda_2$, то је
$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n,$$
при чему се C_1, C_2 одређују из почетних услова.

1. Решити диференцну једначину
$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n,$$
ако је $x_1 = 5$ и $x_2 = 13$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^2 - 5x + 6 = 0$ су $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, па је опште решење облика $x_n = C_1 2^n + C_2 3^n$. Константе C_1, C_2 се одређују из почетних услова, $C_1 = C_2 = 1$. Дакле, опште решење је $x_n = 2^n + 3^n$.

2. Решити диференцну једначину
$$x_{n+2} = 2x_{n+1} + 3x_n,$$
ако је $x_0 = 3$ и $x_1 = 1$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^2 - 2x - 3 = 0$ су $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 3$, па је опште решење облика $x_n = C_1(-1)^n + C_2 3^n$. Константе C_1, C_2 се одређују из почетних услова, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$. Дакле, опште решење је $x_n = 2(-1)^n + 2^n$.

3. Решити диференцну једначину

$$x_{n+2} = 4x_{n+1} + 4x_n,$$

ако је $x_1 = 4$ и $x_2 = 12$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^2 - 4x + 4 = 0$ су $\lambda_1 = 2 = \lambda_2$, па је опште решење облика $x_n = C_1 2^n + C_2 n 2^n$. Константе C_1, C_2 се одређују из почетних услова, $C_1 = C_2 = 1$. Дакле, опште решење је $x_n = 2^n(1+n)$.

4. Одредити општи члан Фибоначијевог низа ($f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $f_1 = f_2 = 1$).

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^2 - x - 1 = 0$ су $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, па је опште решење облика $f_n = C_1(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n + C_2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$. Константе C_1, C_2 се одређују из почетних услова, $C_1 = -C_2 = -\frac{\sqrt{5}}{5}$. Дакле, опште решење је $f_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{\sqrt{5}}{5}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})$.

Нека су x_1, x_2, x_3 дати и

$$x_{n+3} = \alpha x_{n+2} + \beta x_{n+1} + \gamma x_n.$$

Тада је карактеристична једначина

$$x^3 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma.$$

Нека су $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ решења карактеристичне једначине.

Ако је $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$, то је

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n + C_3\lambda_3^n.$$

Ако је $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то је

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n + C_3\lambda_3^n.$$

Ако је $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то је

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2 n\lambda_1^n + C_3 n^2\lambda_1^n.$$

5. Решити диференцну једначину

$$x_{n+3} = -x_{n+2} + 17x_{n+1} - 15x_n,$$

ако је $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_2 = 9$.

Решење. Корени карактеристичне једначине $x^3 + x^2 - 17x + 15 = 0$ су $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -5$. Опште решење је облика $C_1 + C_2 3^n + C_3(-5)^n$. Из почетних услова се одређују константе $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = 0$. Дакле, опште решење је $x_n = 3^n$.

6. Решити систем диференцних једначина

$$x_{n+1} = 2x_n - y_n,$$

$$y_{n+1} = x_n + 4y_n,$$

ако је $x_0 = 2$, $y_0 = 1$.

Решење. Из прве једначине је $y_n = 2x_n - x_{n+1}$, односно $y_{n+1} = 2x_{n+1} - x_{n+2}$. Сменом у другу једначину, добија се $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$, одакле следи $x_n = C_1 3^n + C_2 n 3^n$. Из почетних услова се одређују C_1, C_2, односно $x_n = 3^n(2 - n)$,а добија се и $y_n = 3^n(n + 1)$.

7. Решити систем диференцних једначина

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n,$$

$$y_{n+1} = x_n + 2y_n,$$

ако је $x_1 = 2$, $y_1 = 1$.

Решење. Решавањем система се добија карактеристична једначина за x_n: $x^2 - 4x + 1 = 0$, чији су корени $2 \pm \sqrt{3}$. Лако се налази $x_n = \frac{(2-\sqrt{3})^n + (2+\sqrt{3})^n}{2}$, $y_n = \frac{\sqrt{2}}{6}((2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n)$.

8. Нека је

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s}, \;\; p, q, r, s \in \mathbb{R},$$

$$x_{n+1} = px_n + qy_n,$$

$$y_{n+1} = rx_n + sy_n,$$

при чему је $x_1 = a_1 = a$, $y_1 = 2$. Доказати да је

$$a_n = \frac{x_n}{y_n},$$

ако је $y_n \neq 0$ за све $n \in \mathbb{N}$.

Решење. Лако се проверава индукцијом.

9. Решити диференцну једначину

$$a_{n+1} = \frac{1-4a_n}{1-6a_n},$$

ако је $a_1 = 1$.

Решење. Користи се претходни задатак. Треба решити систем диференцних једначина,

$$x_{n+1} = 4x_n - y_n,$$

$$y_{n+1} = 6x_n - y_n.$$

Добија се $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$, одакле се налази $x_n = C_1 + C_2 2^n$, а уврштавањем почетних услова, $x_n = 2^n - 1$, $y_n = 2^{n+1} - 3$. Овде је $a_n = \frac{x_n}{y_n}$.

10. Решити диференцну једначину

$$a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 3},$$

ако је $a_0 = 1$.

Решење. Треба решити систем

$$x_{n+1} = x_n - y_n,$$

$$y_{n+1} = x_n + 3y_n,$$

уз почетне услове $x_0 = 1$, $y_0 = 1$. Лако се налази $x_n = 2^n(1-n)$, $y_n = 2^n(1+n)$ и $a_n = \frac{x_n}{y_n}$.