Зимски семестар 2021/2022 Вежбе из Анализе 1
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Трећа недеља

1.1 Супремум и инфимум, минимум и максимум скупа

1. Одредити $\sup A, \inf A, \max A, \min A$ за скуп A
а) $A = [0, 5)$,
б) $A = (-1, 3]$,
в) $A = \{|n^2 - 5| : n \in \mathbb{Z}\}$,
г) $A = \{x + \frac{2}{x} : x \in \mathbb{Q}\}$,
д) $A = \{\sin x + \cos x : x \in \mathbb{R}\}$.

Решење. а) $\sup A = 5$, $\max A$ не постоји, $\inf A = 0 = \min A$,
б) $\sup A = \max A = 3$, $\inf A = -1$, $\min A$ не постоји,
в) $\inf A = \min A = 1$, $\sup A = \infty$, $\max A$ не постоји,
г) $\inf A = 2\sqrt{2}$, $\min A$ не постоји, $\sup A = \infty$, $\max A$ не постоји,
д) $\inf A = \min A = -\sqrt{2}$, $\sup A = \max A = \sqrt{2}$.

2. Одредити $\sup A, \inf A, \max A, \min A$ за скуп $A = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, m < n\}$.

Решење. $\inf A = 0$ јер је 0 очигледно миноранта, а за $\varepsilon > 0$ по Архимедовој аксиоми постоји n_0 тако да $n_0\varepsilon > 1$ тј. $\varepsilon > \frac{1}{n_0} \in A$.

$\sup A = 1$ јер је 1 очигледно мајоранта и за $\varepsilon > 0$ постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ тако да $\varepsilon n_0 > 1$, тј. $1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{n_0} \in B$.

3. Одредити $\sup A, \inf A, \max A, \min A$ за скуп
а) $A = \{\frac{2n+1}{n+2} : n \in \mathbb{N}\}$,
б) $A = \{2 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
в) $A = \{2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$,
г) $A = \{[-2, -1] \cup (1, 3)\} \cap \mathbb{Q}$.

Решење. а)$\inf A = \min A = 2$, $\sup A = 2$, $\max A$ не постоји,
б)$\inf A = \min A = 1$, $\sup A = \max A = \frac{5}{2}$,
в) $\inf A = \min A = 1$, $\sup A = 2$, $\max A$ не постоји,
г) $\inf A = \min A = -2$, $\sup A = 3$, $\max A$ не постоји.

4. Нека су $B, C \subset \mathbb{R}$, $A = B \cup C$. Доказати $\sup A = \max\{\sup B, \sup C\}$.

Решење. Нека је $\sup B = b$ и $\sup C = c$. Претпоставимо да је $b \geqslant c$. За свако $x \in B$ је $x \leqslant b$ и за свако $x \in C$ је $x \leqslant c$. Дакле, $x \leqslant \max\{b, c\} = b$ тј. b је горње ограничење. Нека је $\varepsilon > 0$, тада $b - \varepsilon$ није ограничење за B, па ни за $B \cup C$, односно мора бити $\sup B \cup C = b$. Аналогно се доказује случај $c \geqslant b$.

5. Нека је $A \subset B$. Доказати
а) $\sup A \leqslant \sup B$,
б) $\inf A \geqslant \inf B$.

Решење. $\sup B$ је горње ограничење скупа A, а како је $\sup A$ најмање горње ограничење скупа A,онда важи $\sup A \leqslant \sup B$. Слично, $\inf B$ је доње ограничење скупа A, а како је $\inf A$ највеће доње ограничење, то је $\inf A \geqslant \inf B$.

6. Нека је $A \subset \mathbb{R}$ и $A \neq \varnothing$. Доказати да је $\inf A \leqslant \sup A$ и да једнакост важи акко је A једночлан. Шта се дешава у случају $A = \varnothing$?

Решење. Како је за свако $x \in A$ $\inf A \leqslant x \leqslant \sup A$. Ако је $\inf A = \sup A$, то је A једночлан (иначе, $x, y \in A$ и важи $\inf A \leqslant x < y \leqslant \sup A$, па је $\inf A < \sup A$. Контрадикција). За једночлан скуп $A = \{x\}$, $x = \inf A = \sup A$. За празан скуп A је $\inf A = +\infty$, $\sup A = -\infty$.

7. Нека је $E = \{g(x) : x \in \mathbb{R}\}$ за $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-|x|}$. Одредити $\sup E$, $\inf E$, $\max E$, $\min E$.

Решење. Посматрајмо график функције. Лако се провери да је $\max E = \sup E = 1$. Минимум скупа не постоји, а $\inf E = 0$.

8. Нека је $-A = \{-x : x \in A\}$. Доказати
а) $\inf(-A) = -\sup A$,
б) $\sup(-A) = -\inf A$.

Решење. Нека је $\sup A = M$, тада је $-M$ доње ограничење за $-A$. За $\varepsilon > 0$ је $-x < -M + \varepsilon$, па је $\inf(-A) = -\sup A$. Аналогно за другу једнакост.

9. Нека је $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$. Доказати
а) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,
б) $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

Решење. Нека је $M_1 = \sup A$ и $M_2 = \sup B$, тада је $M_1 + M_2$ мајоранта за $A + B$. Нека је $\varepsilon > 0$. Тада, постоји $x \in A$ тако да $x > M - \frac{\varepsilon}{2}$ и постоји $y \in B$ тако да $y > M_2 - \frac{\varepsilon}{2}$. Следи, $x + y > M_1 + M_2 - \varepsilon$, односно $\sup A + B = M_1 + M_2$. Аналогно се доказује други случај.

10. Нека је $A \cdot B = \{xy : x \in A, y \in B\}$, $A, B \subset \mathbb{R}_+$. Доказати
а) $\sup(AB) = \sup A \cdot \sup B$,
б) $\inf(AB) = \inf A \cdot \inf B$.
Да ли тврђење важи за произвољне подскупове од $\mathbb{R}$?

Решење. Нека је $M_1 = \sup A$ и $M_2 = \sup B$, тада је M_1M_2 горње ограничење за AB. За $\varepsilon > 0$ постоји $x \in A$ тако да $x > M_1 - \frac{\varepsilon}{2M_2}$ и постоји $y \in B$ тако да $y > M_2 - \frac{\varepsilon}{2M_1}$. Тада, $xy > M_1M_2 - \varepsilon$, односно $\sup AB = M_1M_2$. Аналогно се доказује за инфимум. Да за произвољне подскупове реалне праве тврђење не важи види се из следећег примера: $A = (-3, -1)$, $B = [0, 1]$, $\sup A = -1$, $\sup B = 1$, $\sup AB = \max AB = 0$.