Зимски семестар 2021/2022 Вежбе из Анализе 1
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Друга недеља

1.1 Принцип математичке индукције

$$P(1) \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(P(n) \implies P(n+1)) \implies (\forall n \in \mathbb{N})P(n).$$

1. Наћи цео део броја $a_n = \sqrt[3]{24 + \sqrt[3]{24 + \ldots \sqrt[3]{24}}}$.

Решење. Приметимо да је $2 \leqslant \sqrt[3]{24} < 3$. Докажимо индукцијом да је за свако $n \in \mathbb{N}$ $a_n \in [2, 3)$. Базу индукције смо проверили, она важи. Претпоставимо да важи за a_n и докажимо индуктивни корак, тј. да одатле следи важење за a_{n+1}. Како је $a_n \in [2, 3)$, а $a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n + 24}$, то је $2 < \sqrt{26} = \sqrt[3]{24 + 2} \leqslant a_{n+1} < \sqrt[3]{24 + 3} = 3$, што је и требало доказати.

2. Доказати индукцијом $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Решење. За $n = 1$: $1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4}$, па база индукције важи. Докажимо индукцијски корак. Поставимо индуктивну хипотезу за n: $S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ и докажимо одатле формулу за $n+1$: $S_{n+1} = S_n + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2(\frac{n^2}{4} + n + 1) = (n+1)^2(\frac{n^2+4n+4}{4}) = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$. Принципом математичке индукције закључујемо да формула важи за све природне бројеве.

3. Доказати Бернулијеву неједнакост $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$, $x > -1$, $n \in \mathbb{N}$.

Решење. База индукције за $n = 1$ важи јер је $(1 + x)^1 = 1 + 1 \cdot x$. Претпоставимо да за $n \in \mathbb{N}$ важи $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$ и посматрајмо израз $(1 + x)^{n+1}$. Имамо да важи $(1 + x)^{n+1} = (1 + x)(1 + x)^n \geqslant (1 + x)(1 + nx) = 1 + (n + 1)x + nx^2$, а како је nx^2 ненегативно, то је $(1 + x)^{n+1} \geqslant 1 + (n + 1)x$, што је и требало доказати.

4. Доказати биномну формулу $(a + b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Решење. Приметимо најпре да је $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$, за $n-1 \geqslant k$. Докажимо биномну формулу индукцијом. За $n=1$ важи једнакост, па је база индукције задовољена. Претпоставимо да формула важи за n, тј. да је $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ и посматрајмо израз за $n+1$: $(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \binom{n}{0} a^{n+1} + [\binom{n}{1} + \binom{n}{0}]a^n b + \cdots + [\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}]ab^n + b^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \cdots + \binom{n+1}{n} ab^n + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$. Овим је тврђење доказано.

5. Доказати неједнакост аритметичке и геометријске средине,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} \geqslant \prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}}.$$

Решење. У случају $n=1$ важи једнакост, а случај $n=2$ је еквивалентан ненегативности бинома $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2$. Надаље ћемо примењивати регресивну индукцију, показаћемо да $n \Rightarrow 2n$ и $n \Rightarrow n-1$. Имамо да је

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{x_k}{2n} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n} + \sum\limits_{k=n+1}^{2n} \frac{x_k}{n}}{2} \geqslant \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}} + \prod\limits_{k=n+1}^{2n} x_k^{\frac{1}{n}}}{2} \geqslant \sqrt{\prod_{k=1}^{2n} x_k^{\frac{1}{n}}} = \prod_{k=1}^{2n} x_k^{\frac{1}{2n}}$$

. Слично,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{n-1} = \frac{1+\frac{1}{n-1}}{n} \sum_{k=1}^{n-1} x_k \geqslant \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k + \frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1} x_k}{n-1}}{n} \geqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n-1} x_k \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{n-1}},$$

одакле се након степеновања са n, добија

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{x_k}{n} \geqslant \prod_{k=1}^{n-1} x_k^{\frac{1}{n-1}}.$$

Коначно, можемо закључити да тврђење важи за свако $n \in \mathbb{N}$.

6. За $x \in [0, \pi]$ доказати неједнакост

$$|\sin(\sum_{k=1}^{n} x_k)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin(x_k).$$

Решење. База индукције важи, поставимо хипотезу за n. Применом адиционе формуле, добија се

$$|\sin\sum_{k=1}^{n+1} x_k| = |\sin(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1})| = |\sin(\sum_{k=1}^{n} x_k)\cos x_{n+1} + \cos(\sum_{k=1}^{n} x_k)\sin x_{k+1}|.$$

Одавде је на основу неједнакости троугла,

$$|\sin(\sum_{k=1}^{n+1} x_k)| \leqslant |\sin(\sum_{k=1}^{n} x_k)| + |\sin(x_{n+1})| \leqslant \sum_{k=1}^{n}\sin(x_k) + \sin(x_{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1}\sin(x_k).$$

7. Доказати неједнакост $n^{n+1} > (n+1)^n$ за $n \geqslant 3$.

Решење. Како је $81 = 3^4 > 4^3 = 64$, база индукције важи. Претпоставимо $n^{n+1} > (n+1)^n$. Тада, $(n+1)^{n+2} > \frac{(n+1)^{2(n+1)}}{n^{n+1}} = (n+2+\frac{1}{n})^{n+1} > (n+2)^{n+1}$.

8. Доказати $f(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k}\frac{1}{2^k} = 2^n$.

Решење. Приметимо да је $f(1) = 2$ и имајмо на уму идентитет $\binom{n+1+k}{k} = \binom{n+k}{k} + \binom{n+k}{k-1}$. Стога,

$$f(n+1) = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1+k}{k}\frac{1}{2^k} = \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n+1+k}{k}\frac{1}{2^k},$$

$$f(n+1) = \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}} + 1 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+k}{k}\frac{1}{2^k} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+k}{k-1}\frac{1}{2^k},$$

$$f(n+1) = \binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}} + f(n) + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1+k}{k}\frac{1}{2^{k+1}},$$

$$f(n+1) = (\binom{2n+1}{n+1} + \binom{2n+1}{n})\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1+k}{k}\frac{1}{2^k},$$

$$f(n+1) = f(n) + \binom{2n+1}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1+k}{k}\frac{1}{2^k},$$

$$f(n+1) = f(n) + \frac{1}{2}\binom{2n+2}{n+1}\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1+k}{k}\frac{1}{2^k},$$

$$f(n+1) = f(n) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1+k}{k}\frac{1}{2^k},$$

$$f(n+1) = f(n) + \frac{1}{2}f(n+1),$$

одакле је

$$f(n+1) = 2f(n).$$

9. Нека је α реалан број такав да $\alpha + \frac{1}{\alpha} \in \mathbb{Z}$. Доказати да $\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Решење. За $n = 0$ и $n = 1$ тврђење важи (база индукције). (Индуктивни корак) Претпоставимо да за неко n важи

$$\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}, \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}.$$

Тада,

$$\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = (\alpha + \frac{1}{\alpha})(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}) - (\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}}) \in \mathbb{Z}.$$

10. Нека је $a_0 = 1$ и $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$ за $n \geqslant 1$. Показати да је низ монотоно растући и ограничен одозго са 2.

Решење. Имамо $a_0 < a_1$; претпоставимо $a_{n-1} < a_n$. Експоненцијална функција је растућа и чува неједнакост, па следи $a_n = \sqrt{2}^{a_{n-1}} < \sqrt{2}^{a_n} = a_{n+1}$. Овим је показано да је низ растући. Докажимо ограниченост. Важи $a_0 < 2$. Претпоставимо $a_n < 2$. Тада, $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n} < \sqrt{2}^2 = 2$. Дакле, a_n је ограничен одозго са 2.