Зимски семестар 2021/2022 Вежбе из Анализе 1
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Друга недеља

1.1 Скупови

Дефиниција 1. Нека је X универзални скуп.

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\},$$
$$A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\},$$
$$A^C = X \backslash A = \{x \in X : x \notin A\},$$
$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\},$$
$$\mathcal{P}A = \{B : B \subset A\}.$$

1. Доказати да важе
(закони идемпотенције) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$,
(закони комутације) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$,
(закони асоцијације) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
(закони дистрибуције) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
(закони апсорпције) $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$,
(Де Морганова правила) $A \cup A^C = X$, $A \cap A^C = \varnothing$, $\varnothing^C = X$, $X^C = \varnothing$, $A^{C^C} = A$, $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$, $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$.

Решење. За вјежбу читаоцу.

2. а) Ако је $A = \{x \in R : x^2 + 6x - 7 < 0\}$ и $B = \{x \in R : x^2 - x - 2 \geqslant 0\}$, одредити $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$.
б) Ако је $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$, $A' = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$, $A'' = \{x \in R : 0 \leqslant x \leqslant 1\}$ и $B = \{z \in \mathbb{R} : 0 \leqslant z \leqslant 1\}$, приказати графички $A \times B$, $A' \times B$, $A'' \times B$ и $A^2 \times A'$.

Решење. Како је $A = (-7, 1)$ и $B = (-\infty, -1] \cup [2, \infty)$, лако се налазе пресек, разлика, унија ова два скупа.

1.2 Релације

Дефиниција 2. Нека су X и Y скупови и $\rho \subset X \times Y$. Тада кажемо да је ρ бинарна релација из X у Y.

3. Нека је $\rho = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 = y^2 + 3y + 1\}$. Одредити домен и слику релације ρ.

Решење. $x \in Dom(\rho)$ акко постоји $y \in \mathbb{R}$ тако да $x^3 = y^2 + 3y + 1$. Одавде, $Dom(\rho) = [-\sqrt[3]{\frac{9}{4}}, \infty)$. Са друге стране, $y \in Im(\rho)$ акко постоји $x \in \mathbb{R}$ тако да је $x^3 = y^2 + y + 1$. Како је ово испуњено за све $y \in \mathbb{R}$, то је $Im(\rho) = \mathbb{R}$.

4. Нека је $\rho = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leqslant x - y \leqslant 2, -1 \leqslant x + y \leqslant 5\}$. Одредити домен и слику релације ρ.

Решење. Релација ρ је заправо један паралелограм у равни (нацртати слику), чија темена су $(-1,0)$, $(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$, $(\frac{7}{2}, \frac{3}{2})$, $(2,3)$. Добија се да је $Dom(\rho) = [-1, \frac{7}{2}]$, $Im(\rho) = [-\frac{3}{2}, 2]$.

Дефиниција 3. Релација ρ на скупу X је релација еквиваленције ако је
рефлексивна: $(\forall x \in X) x\rho x$,
симетрична: $(\forall x, y \in X)(x\rho y \Rightarrow y\rho x)$,
транзитивна: $(\forall x, y, z \in X)(x\rho y, y\rho z \Rightarrow x\rho z)$.

5. Нека је $m \geqslant 2$ цео број. Дефинишимо бинарну релацију на $\mathbb{Z}$ са: $a \equiv_m b$ акко $m|a-b$. Доказати да је $\equiv_m$ релација еквиваленције и одредити њене класе и количнички скуп.

Решење. Посматрана релација је рефлексивна јер $m|0 = a - a$. Такође, ако $m|a-b$, онда $m|b-a$, па је релација симетрична. Транзитивност такође важи, ако $m|a-b$ и $m|b-c$, онда $m|a-c = (a-b)+(b-c)$. Дакле, $\equiv_m$ јесте релација еквиваленције која има m класа $m\mathbb{Z}, m\mathbb{Z}+1, \ldots m\mathbb{Z}+m-1$. Количнички скуп је скуп класа еквиваленције.

Дефиниција 4. Релација ρ на скупу X је релација поретка (или уређења) ако је
рефлексивна: $(\forall x \in X) x\rho x$,
антисиметрична: $(\forall x, y \in X)(x\rho y, y\rho x \Rightarrow x - y)$,
транзитивна: $(\forall x, y, z \in X)(x\rho y, y\rho z \Rightarrow x\rho z)$.
За скуп X кажемо да је уређен релацијом ρ. Ако ρ задовољава јос и услов
$(\forall x, y \in X)(x\rho y \vee y\rho x)$, кажемо да је ρ релација потпуног поретка.

Дефиниција 5. Елемент m посета P је највећи ако за сваки елемент $x \in P$ важи: $x \leqslant m$. Кажемо да је елемент m посета P максималан уколико не постоји елемент $x \in P$ такав да је $m < x$. Аналогно се дефинишу најмањи и минималан елемент посета. Ако су свака два елемента упоредива, тада је скуп P линеарно уређен. Линеарно уређен подскуп неког посета се назива ланац. Ако су у неком подскупу неког посета свака два различита елемента неупоредива, такав посет називамо антиланац.

Пример 1. Ако радимо са релацијом дељивости у $\mathbb{Z}_+$, скуп свих простих бројева чини један антиланац.

6. На скупу $\mathbb{R}^2$ дефинишимо релацију парцијалног уређења са $(a, b) \preceq (c, d)$ акко $a \leqslant c$ и $b \leqslant d$, где је са $\leqslant$ означена стандардна релација поретка на $\mathbb{R}$.
(а) Доказати да је овако заиста дефинисана једна релација парцијалног уређења.
(б) Посматрајмо троугао $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0, y \geqslant 0, x + 2y \leqslant 1\}$. Наћи максималне и минималне елементе у T. Да ли у T постоји највећи, односно најмањи елемент?

Решење. Важе особине рефлексивности, антисиметричности и транзитивности, па заиста јесте у питању релација поретка на $\mathbb{R}^2$. Какоје за свако $(x, y) \in T$ испуњено $(0, 0) \preceq (x, y)$, то је координатни почетак најмањи елемент у T, а тиме и једини минимални елемент. Нека је $(x, y) \in T$ и нека тачка није на хипотенузи троугла, тј. $x + 2y < 1$. Ако је $y' = \frac{1-x}{2}$, онда $(x, y') \in T$ и $(x, y) \preceq (x, y)$. Дакле, (x, y) није максималан елемент у T. Но, сваки елемент са хипотенузе јесте максималан. Ако је $x + 2y = 1$ и $(x, y) \preceq (u, v)$, онда је $x \leqslant u$ и $y \leqslant v$, при чему је бар једна од ових неједнакости строга. Стога је $1 = x + 2y < u + 2v$ и $(u, v) \notin T$. Дакле, заиста је свако елемент са хипотенузе максималан и у овом посету не постоји највећи елемент.

1.3 Функције

Дефиниција 6. Нека је $f : X \to Y$ и $A \subset X$, $B \subset Y$. Инверзна слика скупа B при функцији f је

$$f^{-1}[B] = \{x \in X : f(x \in B)\},$$

а директна слика скупа A при функцији f је

$$f[A] = \{f(x) : x \in A\}.$$

7. а) Нека је $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ пресликавање дефинисано на следећи начин

$$(x, y) \to (2x + y, x + y).$$

Наћи слику скупа $A \subset \mathbb{R}^2$ ограниченог правама $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$.
б) Одредити слику скупа $A \subset \mathbb{R}^2$ ограниченог хиперболама $xy = 1$, $xy = 2$ и правама $y = x$, $y = 2x$, ако је

$$f(x, y) = (xy, \frac{y}{x}).$$

Решење. У првом случају, слика посматраног скупа је паралелограм, у другом случају је то квадрат.

Дефиниција 7. Нека је $f \subset A \times B$ релација из A у B. Та релација је функционална релација ако за свако $x \in D(f)$ постоји тачно једно $y \in B$ такво да $(x, y) \in f$. У том случају уместо $(x, y) \in f$, че71е се пише $y = f(x)$.

Функција са доменом X и кодоменом Y, у ознаци $f : X \to Y$ је уређена тројка (X, Y, f), где су X и Y скупови, а $f \subset X \times Y$ функционална релација за коју је $D(f) = X$.

8. Нека $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ и нека су A, A', A_i за $i \in I$ подскупови од X, B, B', B_iза $i \in I$ подскупови од Y (I је неки скуп индекса), а C подскуп од Z. Тада важи

$$(g \circ f)[A] = g[f[A]],$$
$$(g \circ f)^{-1}[C] = f^{-1}[g^{-1}[C]],$$
$$f^{-1}[\bigcup_{i \in I} B_i] = \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i],$$
$$f^{-1}[\bigcap_{i \in I} B_i] = \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i],$$
$$f^{-1}[B \backslash B'] = f^{-1}[B] \backslash f^{-1}[B'],$$
$$f[\bigcup_{i \in I} A_i] = \bigcup_{i \in I} f[A_i],$$
$$f[\bigcap_{i \in I} A_i] = \bigcap_{i \in I} f[A_i],$$
$$f[A \backslash A'] \supset f[A] \backslash f[A'],$$
$$f[f^{-1}[B]] \subset B,$$
$$f^{-1}[f[A]] \supset A.$$

Решење. За вјежбу читаоцу.

9. Нека је $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$. Тада важи
а) $g \circ f$ је "1-1" $\implies$ f је "1-1",
б) $g \circ f$ је "на" $\implies$ g је "на",
в) $g \circ f$ и $f \circ g$ су бијекције $\implies$ f и g су бијекције.

Решење. Нека је $f(x_1) = f(x_2)$. Тада је и $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, а како је $g \circ f$ ињективна, следи да је $x_1 = x_2$. Произвољан елемент $z \in Z$ је слика од $y = f(x) \in Y$, јер је g сурјективна.

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B,$$

$$\chi_{A\triangle B} = \chi_A + \chi_B,$$

$$\chi_{A\times B} = \chi_A + \chi_B + \chi_A \cdot \chi_B.$$

10. Показати да важи:
а) $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$,
б) $A = B\cup C \Leftrightarrow A\triangle B\triangle C = B\cap C$,
в) $x\in A\triangle B\triangle C \Leftrightarrow x$ припада једном или сва три скупа A, B, C.

Решење. $x \in A\triangle B\triangle C \Leftrightarrow \chi_A(x) + \chi_B(x) + \chi_C(x) = 1$ и искористи се асоцијативност збира. Аналогно за остале случајеве.