Бројни редови

Зора Голубовић

19.10.2021. године

1 час, Функционални низови и редови

1. Одредити област конвергенције функционалног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n 2^{nx}.$$

Применимо Кошијев критеријум. Како је

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})2^x=2^x,$$

добијамо да је ред конвергентан за свако $x<0$. Испитајмо посебно конвергенцију реда у случају $x=0$. Тада је ред облика $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^n$, па дивергира јер није задовољен неопходан услов конвергенције ($\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e\neq 0$).

2. Испитати апсолутну и условну конвергенцију реда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+y^n}.$$

Претпоставимо најпре да је $0\leq y\leq 1$. Тада је (на основу Кошијевог критеријума) ред конвергентан за $|x|<1$, што следи из

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n+y^n}}=|x|<1$$

Нека је $0 \leq y \leq 1$ и $x \geq 1$. Тада је

$$\frac{x^n}{n+y^n} \geq \frac{x^n}{n+1} \geq \frac{1}{n+1},$$

па је ред дивергентан на основу првог поредбеног критеријума и чињенице да је хармонијски ред дивергентан. Ако је $0 \leq y \leq 1$ и $x = -1$, добија се ред који условно конвергира по Лајбницу (апсолутно дивергира). Испитајмо сада ред за $y > 1$. Напишимо ред у облику

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{x}{y})^n \frac{1}{1+ny^{-n}}.$$

Ако је $|x| < y$, ред је конвергентан на основу Кошијевог критеријума, јер је

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{x}{y})^n \frac{1}{1+ny^{-n}}} = \frac{|x|}{y} < 1.$$

Ако је $x = \pm y$, тада је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y^n}{1+y^n} = 1,$$

па ред дивергира јер општи члан не тежи нули. На основу свега претходног, може се закључити следеће: ред је апсолутно конвергентан ако је $0 \leq y \leq 1$ и $|x| < 1$ или $|x| < y$ и $y > 1$. Ако је $x = -1$ и $0 \leq y \leq 1$, ред је условно конвергентан.

3. Испитати равномерну конвергенцију следећих низова на указаним скуповима:

$$f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2} \text{ на [-1,1]},$$

$$f_n(x) = \frac{\arctan nx}{\sqrt{n+x}} \text{ на } [0,\infty).$$

Гранична функција за први низ је $f(x) = 1$, а како је

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |\frac{n^2}{n^2+x^2} - 1|,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |\frac{x^2}{x^2+n^2}|,$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n^2} = 0,$$

задати низ је равномерно конвергентан на $[-1,1]$. Гранична функција за други низ је 0, а како је $0 \le \frac{\arctan nx}{\sqrt{n+x}} < \frac{\pi}{2\sqrt{n}} \to 0, n \to \infty$, то је и овај низ равномерно конвергентан за $x > 0$.

4. Доказати да је низ функција

$$f_n(x) = \frac{nx + x^2 + n^2}{x^2 + n^2}$$

равномерно конвергентан ка функцији $f(x) = 1$ на сегменту $[0,1]$. Да ли је низ равномерно конвергентан функцији f на целој реалној правој?

Низ је равномерно конвергентан посматраној функцији на сегменту $[0,1]$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |\frac{nx + x^2 + n^2}{n^2 + x^2} - 1|,$$

а како је

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |\frac{nx}{x^2 + n^2}| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0,$$

ред је неравномерно конвергентан суми на реалној правој.

5. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1 + (n-1)x)(1 + nx)}$$

на скупу (а) $(0,\infty)$, (б) (δ,∞), $\delta > 0$.

Лако се проверава да је парцијална сума реда $S_n(x) = 1 - \frac{1}{1+nx}$, а сума задатог реда је $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = 1$. Како је

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,\infty)} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0,\infty)} |\frac{1}{1 + nx}| = 1,$$

ред је неравномерно конвергентан суми $S(x)$ на скупу $(0,\infty)$. Како важи неједнакост $nx > n\delta$ и

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(\delta,\infty)} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1 + n\delta} = 0,$$

то је ред равномерно конвергентан суми $S(x)$ на скупу (δ, ∞).

6. Испитати конвергенцију и равномерну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ на скупу E, где је

$$f_n(x) = e^{-n^2x^2} \sin nx,\ \ E = \mathbb{R},$$

$$f_n(x) = \arctan \frac{x^3}{n\sqrt{n}},\ \ E = [0, \infty)$$

.

Испитајмо први ред. Приметимо најпре да је $f_n(0) = 0$. Ако је $x \neq 0$, тада је

$$|f_n(x)| \leq e^{-n^2x^2} \leq \frac{1}{n^2x^2}.$$

Дакле, ред је конвергентан на реалној правој. Међутим, ред не конвергира равномерно на $\mathbb{R}$, што се види на примеру $x = x_n = \frac{1}{n}$, јер је тада $f_n(x_n) = e^{-1} \sin 1$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

Други ред је конвергентан на скупу E ка граничној функцији $f(x) = 0$, што је последица неједнакости $\arctan x \leq x$, $x \geq 0$. Узимајући $x_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ имамо да је $f_n(x_n) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$, одакле на основу Кошијеве теореме закључујемо да општи члан није равномерно конвергентан, па ни сам ред.

(Вајерштрасов критеријум) Ако постоји низ ненегативних реалних бројева $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, такав да
1. постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да за све $n > n_0$ и свако $x \in A$ важи $|a_n(x)| \leq c_n$,
2. ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ конвергира,
тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ равномерно конвергира на A.

7. Доказати да је сума реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ непрекидна функција за свако $x \in \mathbb{R}$.

Вајерштрасовим критеријумом (поређењем са конвергентним редом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$) се показује да ред равномерно конвергира, па је и сума реда непрекидна функција за свако $x \in \mathbb{R}$.

8. Користећи Вајерштрасов критеријум, доказати да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n^2 x)\cos(n\pi x)}{n\sqrt{n}}$$

конвергентан на $\mathbb{R}$ и да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{x}{n\ln^2(n+1)}\right)$$

конвергентан на $[0,2]$.

Да је први ред равномерно конвергентан на реалној правој добија се поређењем са конвергентним редом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ уз коришћење чињенице да су $\arctan$ и $\cos$ ограничене функције. За други ред, добија се да је ред равномерно конвергентан за $x \in [0,2]$ на основу неједнакости $\ln(1+t) \le t$ за $t \ge 0$ и због конвергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ (по Кошијевом интегралном критеријуму).

9. Испитати равномерну конвергенцију функционалног реда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n^2 x}{x+n^3}\ln\left(1+\frac{x^2}{n}\right)$$

на скуповима

$$E_1 = (0,1),$$
$$E_2 = (1,\infty).$$

Равномерно конвергира на E_1 по Вајерштрасовом критеријуму (поређењем са конвергентним редом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2}{n^3}\frac{1}{n}$) и неравномерно на E_2, што се види за $x_n = n$, $n \in \mathbb{N}$ јер тада није задовољена Кошијева теорема.

10. Дат је ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)^{\alpha}}{n(n+1)(n+2)}x^n$.

1. Испитати условну, апсолутну и равномерну конвергенцију реда.
2. За $x=1$, $\alpha=1$ сумирати ред.

1. Полупречник конвергенције задатог степеног реда

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1,$$

па је ред апсолутно конвергентан на $(-1,1)$. Испитајмо понашање реда на крајевима интервала конвергенције. Ако је $x=1$, применом Рабеовог критеријума се добија да ред конвергира за $\alpha < 2$, док дивергира за $\alpha > 2$:

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1) = 3 - \alpha.$$

За $\alpha = 2$, ред је дивергентан јер се понаша као хармонијски ред. Ако је $x = -1$, тад имамо ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$. Низ b_n тежи нули за $\alpha < 3$ и тад је монотоно опадајући, па конвергира по Лајбницовом критеријуму. Дакле, за $\alpha < 2$ ред је апсолутно и равномерно конвергентан на $[-1,1]$, док је за $x=-1$ и $2 \le \alpha < 3$ ред условно конвергентан.

2. $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{3}{4}$. Тражена сума је 2.