13.10.2021. године
Зора Головић

zora_golubovic@matf.bg.ac.rs

1 РЕДОВИ

1.1 Бројни редови

1. Сумирати ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}$$

Решење. Нека је $a_n = \frac{n}{n^4+n^2+1}$. Очигледно, неопходан услов конвергенције реда је задовољен, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Ред конвергира по поредбеном критеријуму, поређењем са конвергентним редом $\sum\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}$. Разлагањем полинома n^4+n^2+1 се добија да је $a_n = \frac{1}{2(n^2-n+1)} - \frac{1}{2(n^2+n+1)} = \frac{1}{2}(b_n - b_{n+1})$, за $b_n = \frac{1}{n^2-n+1}$, то је $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_N = \lim\limits_{n\to\infty}(b_1 - b_{N+1}) = \frac{1}{2}$.

2. У зависности од параметра $a \in \mathbb{R}$ испитати апсолутну и обичну конвергенцију реда

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^a}.$$

Напомена 1. Октобарски испитни рок, Математика 3 Ц, 2018/2019.

Решење. Уколико је $a = 0$ ред није добро дефинисан. Уколико је $a < 0$ тада општи члан овог реда тежи ка броју 1 када $n \to +\infty$, што значи да ред не конвергира. Нека је $a > 0$. Апсолутна вредност општег члана нашег реда се асимптотски понаша као $\frac{1}{n^a}$, те имамо да ред апсолутно конвергира ако и само ако је $a > 1$ те у том случају имамо и обичну конвергенцију. Испитајмо шта се дешава када $a \in (0, 1)$. Имамо да је

$$\frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^a} = \frac{(-1)^n}{(-1)^n + n^a} \cdot \frac{(-1)^n - n^a}{(-1)^n - n^a} = \frac{1 - (-1)^n n^a}{1 - n^{2a}} = \frac{1}{1 - n^{2a}} - (-1)^n \frac{n^a}{1 - n^{2a}}.$$

Ред $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^a}{1 - n^{2a}}$ конвергира за свако $a \in (0, 1)$ на основу Лајбницовог критеријума. То значи да је конвергенција полазног реда еквивалентна са конвергенцијом реда $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{1 - n^{2a}}$ а конвергенција овог реда је еквивалентна са конвергенцијом реда $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{2a}}$. Овај ред је конвергентан ако и само ако је $2a > 1$ тј. ако и само ако је $a > \frac{1}{2}$. Дакле, ако је $a \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ полазни ред конвергира, а ако је $a \in (0, \frac{1}{2}]$ полазни ред дивергира.

3. Сумирати ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}.$$

Решење. Најпре, ово је ред са позитивним члановима и он је еквиконвергентан са редом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n^2}$. Ово важи јер је $\operatorname{arctg} \sim x$, $x \to 0$. Уведимо ознаку $a_n = \operatorname{arctg} n$, $n \in \mathbb{N}_0$. Приметимо да важи

$$\operatorname{tg}(a_{n+1} - a_{n-1}) = \frac{\operatorname{tg} a_{n+1} - \operatorname{tg} a_{n-1}}{1 + \operatorname{tg} a_{n+1} \cdot \operatorname{tg} a_{n-1}} = \frac{2}{n^2} \implies \overbrace{\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(a_{n+1} - a_{n-1})\right)}^{= a_{n+1} - a_{n-1}} = \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Дакле, имамо да је

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} - a_{n-1}).$$

Нека је $m \in \mathbb{N}$ произвољно. Тада је

$$\sum_{n=1}^{m} (a_{n+1} - a_{n-1}) = a_{m+1} + a_{m-1} - a_1 - a_0 \implies \lim_{m \to +\infty} \sum_{n=1}^{m} (a_{n+1} - a_{n-1}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{3\pi}{4}.$$

4. Да ли је ред

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$$

конвергентан?

Решење. Користећи да је $\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = (-1)^n \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1} - \pi n\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$, то се добија да је полазни ред облика $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x_n$ за $x_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$. Како је низ x_n позитиван на $(0, \frac{\pi}{2})$, опадајући и тежи 0, то на основу Лајбницовог критеријума и полазни алтернирајући ред конвергира.

5. Чланови низа (a_n) задовољавају рекурентну формулу

$$a_n = 4a_{n-1} - a_{n-2}, \text{за } n \geqslant 3.$$

Доказати да је

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg} \frac{a_n^2}{2} = \frac{\pi}{12},$$

ако је $a_1 = 2$, $a_2 = 8$.

Решење. Решење посматране рекурентне једначине је

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{3}}(a^n + \frac{1}{a^n}),\ \text{za}\ a = 2 + \sqrt{3}.$$

Лако се провери да онда важи идентитет

$$\frac{a_{n+1}^2 + a_n^2}{1 + a_n a_{n+1}} = 4,$$

што је са друге стране једнако $\frac{a_n+2+a_n}{a_{n+1}}$, одакле се добија релација

$$a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 - a_n}{1 + a_n a_{n+1}}.$$

Индукцијом (уз кори71ење добијене релације) се показује да је

$$\sum_{k=1}^{n} \cot^{-1} a_k^2 = \cot^{-1} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \cot^{-1} a = \frac{\pi}{12}.$$

6. Нека је

$$\begin{aligned} x_1 &= a > 0, \\ x_{n+1} &= \frac{x_n}{1 + x_n + x_n^2}, n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Испитати условну и апсолутну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n x_n$.

Решење. Индукцијом се показује да је $x_n > 0$ за све $n \in \mathbb{N}$. Такође, очигледно важи $x_{n+1} < x_n$. Дакле, низ је опадајући и ограничен одоздо, па конвергира. Преласком на лимес се добија да тежи 0, па посматрани ред условно конвергира по Лајбницовом критеријуму. Ред апсолутно дивергира, јер се применом Штолцовог става добија:

$$\lim_{n\to\infty} n x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)-n}{\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{x_n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}x_n}{x_{n+1}-x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+x_n} = 1,$$

односно $x_n \sim \frac{1}{n}$, $n \to \infty$.

7. Испитати условну и апсолутну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Решење. Неједнакост $|\sin x| > \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ важи акко $\frac{1}{8} < \{\frac{x}{\pi}\} < \frac{7}{8}$. Како је $\frac{1}{4} < \frac{1}{\pi}$, следи да је за свако n, или $|\sin n|$ или $|\sin(n+1)|$ веће од $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$. Стога,

$$\frac{|\sin(n)|}{n} + \frac{|\sin(n+1)|}{n+1} \geqslant \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \frac{1}{n+1}.$$

На основу поредбеног критеријума следи да ред апсолутно дивергира. Испитајмо обичну конвергенцију. Низ са општим чланом $\frac{1}{n}$ опадајуће тежи 0 кад $n \to \infty$, а на основу адиционе формуле важи процена

$$|\sum_{k=1}^{n} \sin k| = \frac{|\sum\limits_{k=1}^{n} 2\sin\frac{1}{2}\sin k|}{|2\sin\frac{1}{2}|} = \frac{|\sum\limits_{k=1}^{n} \cos(k-\frac{1}{2}) - \cos(k+\frac{1}{2})|}{|2\sin\frac{1}{2}|} = \frac{|1-\cos(n+\frac{1}{2})|}{|2\sin\frac{1}{2}|},$$

одакле се применом неједнакости троугла добија

$$|\sum_{k=1}^{n} \sin k| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{1}{2}},$$

те ред условно конвергира по Дирихлеу.

8. Наћи суму реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n-1})$.

Решење.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + (\frac{1}{2}+\frac{1}{3})\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + (\frac{1}{4}+\frac{1}{5})\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

Како је

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{k},$$

то је

$$S = 1+\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{2n-1}}{n} = 1+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)}+2\sum_{n=2}^{\infty}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2}+2\ln 2.$$

9. Испитати условну и апсолутну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n(n^{\frac{1}{n}}-1)$.

Решење. Низ $(n^{\frac{1}{n}}-1)$ монотоно тежи нули (за $n \geqslant 3$ је опадајући), па по Лајбницовом критеријуму ред условно конвергира. Како важи неједнакост

$$x-1 = \int_1^x 1dt \geqslant \int_1^2 \frac{1}{t} = \ln x,$$

то је

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n}}-1) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \ln n^{\frac{1}{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n},$$

а овај ред дивергира по Кошијевом интегралном критеријуму, па је и полазни ред апсолутно дивергентан.

10. Нека је x реалан број. Дефинишимо низ $(x_n)_{n\geqslant 1}$ рекурзивно са

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_{n+1} &= x^n + nx_n, \text{ за } n \geqslant 1. \end{aligned}$$

Доказати да је

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{x^n}{x_{n+1}}) = e^{-x}.$$

Решење. Одредимо n-ту парцијални производ користећи рекурентну формулу

$$P_n = \prod_{k=1}^{n}(1 - \frac{x^k}{x_{k+1}}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1} - x^k}{x_{k+1}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{kx_k}{x_{k+1}} = \frac{n!}{x_{n+1}}.$$

Како је

$$\frac{1}{P_{n+1}} - \frac{1}{P_n} = \frac{x_{n+2}}{(n+1)!} - \frac{x_{n+1}}{n!} = \frac{x_{n+2} - (n+1)x_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \text{ за } n \geqslant 1,$$

имамо

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{x^k}{k!},$$

при чему последњи израз конвергира ка e^x кад $n \to \infty$. Дакле,

$$\lim_{n\to\infty} P_n = e^{-x}.$$