Бројни редови

Зора Голубовић

12.10.2021. године

(Лајбницов тест) Ако је $a_{n+1} \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, онда алтернативни ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ конвергира.

1. Испитати апсолутну и обичну конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln^2(n)}{n}$.

Конвергира по Лајбницу, $\frac{\ln^2(n)}{n}$ је опадајући низ који тежи 0, а дивергира апсолутно.

2. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2})$.

Конвергира по Лајбницу, $\sin(\pi\sqrt{n^2+k^2}) = (-1)^n \sin(\pi\sqrt{n^2+k^2} - \pi n) = (-1)^n \sin(\frac{\pi k^2}{\sqrt{n^2+k^2}+n}) = (-1)^n a_n$, при чему је a_n опадајући низ који тежи 0.

(Абелов тест) Ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ конвергира ако конвергира ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и низ b_n је монотоно ограничен.

(Дирихлеов тест) Ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ конвергира ако низ b_n монотоно тежи нули почев од неког члана и низ парцијалних сума реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ је ограничен.

3. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$.

Конвергира као сума таквих редова, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1-\cos 2n}{2n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\cos 2n}{2n}$. Први ред конвергира по Лајбницу јер $\frac{1}{2n}$ опадајуће тежи нули, а други ред конвергира поређењем са конвергентним редом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{n} \frac{\cos(2n)}{2n},$$

$$S_N = \frac{(-1)^N}{2N}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin(2N+1)}{2\sin 1}\right) - \sum_{n=1}^{N-1}\left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin(2n+1)}{2\sin 1}\right)\left(-\frac{(-1)^n}{2n+2} - \frac{(-1)^n}{2n}\right)\right],$$

$$S_N = \frac{(-1)^N}{2N}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sin(2N+1)}{2\sin 1}\right) + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^n(2n+1)}{2n(n+1)} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^n \sin(2n+1)}{4n(n+1)\sin 1}$$

4. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi n^2}{n+1}}{\ln^2 n}$.

Приметимо да је $\cos \frac{\pi n^2}{n+1} = (-1)^{n+1} \cos \frac{\pi}{n+1}$. Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln^2 n}$ конвергира по Лајбницовом критеријуму, а низ $\cos \frac{\pi}{n+1}$ је монотон и ограничен, па полазни ред конвергира по Абеловом критеријуму.

5. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n \sin n^2}{n}$.

Како је $\frac{1}{n}$ низ који опадајуће тежи 0 кад $n \to \infty$ и $|\sum\limits_{k=1}^{n} \sin k \sin k^2| = \frac{1}{2}|\sum_{k=1}^{n} \cos k(k-1) - \cos k(k+1)| = \frac{|1-\cos{(n+1)n}|}{2} \leq 1$, то ред конвергира по Дирихлеовом критеријуму.

Ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира ако конвергира ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

6. Ако ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира, $a_n \geq 0$, онда конвергира и ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n^{\alpha}$, $\alpha \geq 1$.

Општи члан реда тежи нули, па је ограничен са 1. Ред конвергира по поредбеном критеријуму.

7. Ако ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ апсолутно конвергира, онда и ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n}$ конвергира.

Применом Кошијеве неједнакости и претходног задатка, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n} \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

8. Доказати да је $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$.

Производ редова $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ је ред са општим чланом $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} 1^k = (1+(-1))^n$, што је 0 за $n > 0$, а 1 за $n = 0$.

9. Наћи вредност бесконачног производа: $\prod\limits_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2})$.

$\prod\limits_{n=2}^{\infty} (1 - \frac{1}{n^2}) = \lim\limits_{k\to\infty} \prod\limits_{n=2}^{k} (1 - \frac{1}{n^2}) = \lim\limits_{k\to\infty} \prod\limits_{n=2}^{k} \frac{(n-1)(n+1)}{n^2} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2} \cdot \frac{2\cdot 4}{3\cdot 3} \cdot \frac{3\cdot 5}{4\cdot 4} \cdot \dots \cdot \frac{(k-2)\cdot k}{(k-1)\cdot(k-1)} \cdot \frac{(k-1)(k+1)}{k\cdot k} = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{k}) = \frac{1}{2}$.

10. Наћи вредност бесконачног производа: $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n^3+1}$.

$\prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^3+1}{n^3-1} = \prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)(n+\omega)(n+\omega^2)}{(n-1)(n-\omega)(n-\omega^2)} = \prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)(n-1-\omega)(n-1-\omega^2)}{(n-1)(n-\omega)(n-\omega^2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(1-\omega)(1-\omega^2)}{1\cdot 2(n-\omega)(n-\omega^2)} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3(1+\frac{1}{n})}{2(1-\frac{\omega}{n})(1-\frac{\omega^2}{n})} = \frac{3}{2}$.