

1 Правила природне дедукције

Аксиома $\frac{}{\Gamma, \phi \vdash \phi}$ (ax)

Слабљење $\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma, \psi \vdash \phi}$ (slab)

Увођење и елиминација импликације

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi} (\Rightarrow_U)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi} (\Rightarrow_E)$$

Увођење и елиминација конјункције

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi} (\wedge_U)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \phi} (\wedge^l_E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \wedge \psi}{\Gamma \vdash \psi} (\wedge^d_E)$$

Увођење и елиминација дисјункције

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} (\vee^l_U)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \psi}{\Gamma \vdash \phi \vee \psi} (\vee^d_U)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma, \phi \vdash \theta \quad \Gamma, \psi \vdash \theta}{\Gamma \vdash \theta} (\vee_E)$$

Увођење и елиминација негације

$$\frac{\Gamma, \phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg \phi} (\neg_U)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad \Gamma \vdash \neg \phi}{\Gamma \vdash \perp} (\neg_E)$$

Увођење и елиминација еквиваленције

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \psi \Rightarrow \phi}{\Gamma \vdash \phi \Leftrightarrow \psi} (\Leftrightarrow_U)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \Leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi} (\Leftrightarrow^l_E)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \Leftrightarrow \psi}{\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \phi} (\Leftrightarrow^d_E)$$

Увођење и елиминација универзалног квантификатора

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \quad u \text{ није слободна у } \Gamma}{\Gamma \vdash \forall u \phi} (\forall_U)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \forall u \phi}{\Gamma \vdash \phi[u/t]} (\forall_E)$$

Увођење и елиминација егзистенцијалног квантификатора

$$\frac{\Gamma \vdash \phi[u/t]}{\Gamma \vdash \exists u \phi} (\exists_U)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \exists u \phi \quad \Gamma, \phi \vdash \psi \quad u \text{ није слободна у } \Gamma, \psi}{\Gamma \vdash \psi} (\exists_E)$$

Увођење и елиминација једнакости

$$\frac{}{\Gamma \vdash t = t} (=U)$$

$$\frac{\Gamma \vdash \phi[u/t] \quad \Gamma \vdash t = s}{\Gamma \vdash \phi[u/s]} (=E)$$

Класична контрадикција

$$\frac{\Gamma, \neg \phi \vdash \perp}{\Gamma \vdash \phi} (\perp_c)$$

2 Основне леме

Увођење и елиминација двоструке негације

$$\frac{\Gamma \vdash \phi}{\Gamma \vdash \neg\neg\phi} (\neg\neg I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg\phi}{\Gamma \vdash \phi} (\neg\neg E)$$

Модус толенис

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \neg\phi} (\text{mt})$$

Ex falso quodlibet (Из контрадикције све следи)

$$\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash \phi} (\text{efq})$$

Дисјунктивни силогизми

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma \vdash \neg\phi}{\Gamma \vdash \psi} (\text{ds}^I) \qquad \frac{\Gamma \vdash \phi \vee \psi \quad \Gamma \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \phi} (\text{ds}^d)$$

Контрапозиција

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi}{\Gamma \vdash \neg\psi \Rightarrow \neg\phi} (\text{kp}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\phi \Rightarrow \neg\psi}{\Gamma \vdash \psi \Rightarrow \phi} (\text{kp})$$

Транзитивност импликације

$$\frac{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \psi \Rightarrow \theta}{\Gamma \vdash \phi \Rightarrow \theta} (\Rightarrow_t)$$

Tertium non datur (Принцип искључења трећег)

$$\frac{}{\Gamma \vdash \phi \vee \neg\phi} (\text{tnd})$$

Де Морганови закони

$$\frac{\Gamma \vdash \neg(\phi \wedge \psi)}{\Gamma \vdash \neg\phi \vee \neg\psi} (\text{dm}) \quad \frac{\Gamma \vdash \neg(\phi \vee \psi)}{\Gamma \vdash \neg\phi \wedge \neg\psi} (\text{dm}) \quad \frac{\Gamma \vdash \neg\phi \vee \neg\psi}{\Gamma \vdash \neg(\phi \wedge \psi)} (\text{dm}) \quad \frac{\Gamma \vdash \neg\phi \wedge \neg\psi}{\Gamma \vdash \neg(\phi \vee \psi)} (\text{dm})$$

Симетричност и транзитивност једнакости

$$\frac{\Gamma \vdash t = s}{\Gamma \vdash s = t} (=s) \qquad \frac{\Gamma \vdash t = s \quad \Gamma \vdash s = r}{\Gamma \vdash t = r} (=t)$$

Де Морганови закони за квантификаторе

$$\frac{\Gamma \vdash \neg\exists u \phi}{\Gamma \vdash \forall u \neg\phi} (\text{dm}) \quad \frac{\Gamma \vdash \neg\forall u \phi}{\Gamma \vdash \exists u \neg\phi} (\text{dm}) \quad \frac{\Gamma \vdash \forall u \neg\phi}{\Gamma \vdash \neg\exists u \phi} (\text{dm}) \quad \frac{\Gamma \vdash \exists u \neg\phi}{\Gamma \vdash \neg\forall u \phi} (\text{dm})$$