Зимски семестар 2021/2022 Вежбе из Анализе 1
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Прва недеља

1.1 Разни задаци

1. Наћи све парове реалних бројева (x, y) који задовољавају једначине $|x + y - 4| = 5$, $|x - 3| + |y - 1| = 5$.

Решење. Из датог система следи да је $|x+y-4| = |x-3|+|y-1|$, што је тачно ако су $x-3$ и $y-1$ истог знака. Дакле, решење треба тражити у областима $D_1 = \{(x, y) : x \geqslant 3, y \geqslant 1\}$ и $D_2 = \{(x, y) : x \leqslant 3, y \leqslant 1\}$. У области D_1 систем је еквивалентан једначини $x+y-4 = 5$, па је скуп решења у тој области $R_1 = \{(x, y) : y = 9-x, 3 \leqslant x \leqslant 8\}$. У области D_2, систем је еквивалентан једначини $x + y = -1$, па е скуп решења $R_2 = \{(x, y) : y = -1 - x, -2 \leqslant x \leqslant 3\}$. Скуп решења система је $R = R_1 \cup R_2$.

2. Дата је једначина $x^2 + (a - 2)x - 2a^2 + 5a - 3 = 0$, где је a реални параметар. а) Решити једначину. б) Наћи a за које је апсолутна вредност једног корена два пута већа од апсолутне вредности другог корена.

Решење. а) Решења дате једначине су $x_1 = a-1$ и $x_2 = 3-2a$. б) Треба решити једначине $|x_1| = 2|x_2|$ и $|x_2| = 2|x_1|$. Разликујемо случајеве: $a < 1$, $1 \leqslant a < \frac{3}{2}$и $a \geqslant \frac{3}{2}$. Потенцијална решења су $\frac{7}{5}, \frac{5}{3}, \frac{5}{4}$, али провером се утврђује да ниједно од њих не припада области у којој је дефинисано.

3. Решити једначину $(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x - 1)^3$.

Решење. Уведимо смену $a = x^2 + 3x - 4$ и $b = 2x^2 - 5x + 3$. Добија се $a^3 + b^3 = (a + b)^3$, одакле је $ab(a + b) = 0$. Решавањем се налази $x \in \{-4, 1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\}$.

4. Наћи све парове реалних бројева (x, y) такве да је $\max\{x^2 + y^2, 2\} = \min\{-2x, 2y\}$.

Решење. Како је $\max\{a,b\} \geqslant a, b$ и $min\{a,b\} \leqslant a, b$, следи да мора бити $x^2+y^2 \leqslant -2x$, $x^2+y^2 \leqslant 2y$, $2 \leqslant -2x$, $2 \leqslant 2y$. Једина заједничка тачка ових области је $(-1,1)$ и то је једини пар реалних бројева који задовољава полазну једначину.

5. Решити $||x-3|-3x-1| \geqslant 2x+1$.

Решење. За $x \geqslant 3$ једначина је еквивалентна са $|-2x-4| \geqslant 2x+1$, а за $x < 3$ са $|-2x+2| \geqslant 2x+1$. Решавањем ових подслучајева, налази се скуп решења $(-\infty, \frac{1}{6}] \cup [\frac{3}{2}, \infty)$.

6. Решити $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} < 0$.

Решење. За $x \notin \{0,1,-2\}$ једначина је еквивалентна са $\frac{3x^2+2x-2}{x(x-1)(x+2)} < 0$. Решења су из скупа $(-\infty,-2) \cup (-\frac{\sqrt{7}+1}{3}) \cup (\frac{\sqrt{7}-1}{3}, 1)$.

7. Решити $x-3 > \sqrt{2x^2-10x-12}$.

Решење. Једначина је еквивалентна са $x-3>0$, $2x^2-10x-12 = 2(x+1)(x-6) \leqslant 0$, $(x-3)^2 > 2x^2-10x-12$. Решења су из скупа $[6,7)$.

8. Решити $2\ln(x) + \ln(2) \geqslant \ln(x^2-2x+1) + \ln(3x+2)$.

Решење. Једначина је еквивалентна са $x > 0$, $x^2-2x+1 = (x-1)^2 > 0$, $3x+2 > 0$, $2x^2 \geqslant (x-1)^2(3x+2)$. Решења су из скупа $[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1) \cup (1, 2]$.

9. $\sqrt{2}$ је ирационалан. Доказати

Решење. Доказ свођењем на контрадикцију. Претпоставимо супротно, $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, $\gcd(m,n) = 1$. Квадрирањем имамо да је $m^2 = 2n^2$, одакле налазимо да $2|m$, тј. $m = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$. Сменом тога у полазну једнакост имамо $n^2 = 2k^2$, одакле је $2|n$. Дакле, $2|\gcd(m,n) = 1$. Контрадикција.

10. Одредити све реалне бројеве x и y за које важи $x^2 - 2x\cos(xy) + 1 = 0$.

Решење. Дата једначина је еквивалентна са $(x-\cos(xy))^2 + \sin^2(xy) = 0$, односно са $\cos(xy) = x$ и $\sin(xy) = 0$. Имамо да је (из друге једнакости) $xy = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, па како је $\cos k\pi = \pm 1$, добијамо да $x \in \{-1,1\}$. Ако је $x = 1$, $y = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Ако је $x = -1$, имамо да је $y = (2l+1)\pi$, $l \in \mathbb{Z}$. Дакле, $(x,y) \in \{(1,2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{(-1,(2l+1)\pi : l \in \mathbb{Z})\}$.