Бројни редови

Зора Голубовић

6.10.2021. године

1. Кошијевим критеријумом доказати конвергенцију или дивергенцију редова:
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Конвергира, дивергира.

(Први поредбени критеријум) Нека су $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ позитивни редови. Ако почевши од неког индекса важи $a_n \leq b_n$, тада из конвергенције реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ следи конвергенција реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Из дивергенције реда $\sum\limits_{n=1} a_n$ следи дивергенција реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

(Други поредбени критеријум) Нека су $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ позитивни редови. Ако је $\lim\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n} = C \in (0, \infty)$, тада су ови редови еквиконвергентни.

2. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ако је а) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

б) $a_n = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}$.

Како је $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$, $n \to \infty$, то први ред дивергира, а други ред, чији општи члан је $\sim \frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$, $n \to \infty$, конвергира јер је $\frac{3}{2} > 1$.

3. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n \sin \frac{1}{n})^{n^3}$.

Имамо $a_n = e^{n^3 \ln(n \sin \frac{1}{n})} = e^{n^3 \ln(n(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o(\frac{1}{n^3})))} = e^{n^3 \ln(1 - \frac{1}{6n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} = e^{n^3(-\frac{1}{6n^2} + o(\frac{1}{n^2}))} = e^{-\frac{n}{6}}$, кад $n \to \infty$. Како ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n}{6}}$ конвергира, то конвергира и полазни ред.

(Кошијев интегрални критеријум) Нека је $f(x)$ непрекидна, ненегативна и опадајућа реална функција за $x \geq 1$ и $a_n = f(n)$. Тада ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира акко конвергира несвојствени интеграл $\int\limits_{1}^{\infty} f(x)dx$.

4. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1)$.

Имамо да је $a_n = n^{\frac{1}{n^2+1}} - 1 = e^{\frac{\ln n}{n^2+1}} - 1 = 1 + \frac{\ln n}{n^2+1} + o(\frac{\ln n}{n^2+1}) - 1 = \frac{\ln n}{n^2+1}(1+o(1))$, $n \to \infty$. Дакле, $a_n \sim \frac{\ln n}{n^2}$, $n \to \infty$. Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ конвергира на основу интегралног критеријума: $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x}|_1^{\infty} + \int\limits_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}|_1^{\infty} = 1$, па и полазни ред конвергира.

5. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n^{\alpha}}$ у зависности од параметра $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ред очигледно дивергира за $\alpha \leq 0$. Нека је зато $\alpha > 0$. Дати ред је еквиконвергентан са редом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$, који је према Кошијевом интегралном критеријуму еквиконвергентан са несвојственим интегралом $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}dx$. За $\alpha = 1$, применом парцијалног интеграљења се добија да интеграл дивергира. За $\alpha < 1$ интеграл дивергира по поредбеном критеријуму. Нека је $\alpha > 1$. Тада имамо $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}}dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim\limits_{b\to\infty}(\frac{\ln x}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}|_1^b - \frac{1}{1-\alpha}\int_1^b \frac{1}{x^{\alpha}}dx) = \lim\limits_{b\to\infty}(\frac{lnb}{(1-\alpha)b^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)b^{\alpha-1}} + \frac{1}{1-\alpha}) = \frac{1}{1-\alpha}$. Дакле, полазни ред конвергира за $\alpha > 1$, а дивергира за $\alpha \leq 1$.

6. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln\ln n)^{\alpha}}$.

Полазни ред је еквиконвергентан са интегралом $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}(\ln\ln(x))^{\alpha}$, који је након смене $t = \ln(\ln x)$ једнак са $\int\limits_{\ln(\ln 3)}^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}}$. Овај интеграл конвергира за $\alpha > 1$, а дивергира за $\alpha \leq 1$, па по Кошијевом интегралном критеријуму исто важи и за посматрани ред.

(Раабеов тест) Нека за ред с позитивним члановима важи $\lim\limits_{n\to\infty} n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)=l$. За $l>1$ ред конвергира, а за $l<1$ ред дивергира.

7. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n!e^n}{n^{n+p}}$.

$\frac{a_n}{a_{n+1}}=e^{-1}e^{(n+p)\ln(1+\frac{1}{n})}=e^{-1}e^{(n+p)(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o(\frac{1}{n}))}=1+\frac{p-\frac{1}{2}}{n}+o(\frac{1}{n})$, конвергира по Раабеу за $p>\frac{3}{2}$.

8. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{p(p+1)\cdots(p+n-1)}{n!}\frac{1}{n^q}$.

$\frac{a_n}{a_{n+1}}=(1+\frac{p}{n})^{-1}(1+\frac{1}{n})^{q+1}=(1-\frac{p}{n}+o(\frac{1}{n}))(1+\frac{q+1}{n}+o(\frac{1}{n}))=1+\frac{q+1-p}{n}+o(\frac{1}{n})$, па ред конвергира по Раабеу за $q>p$.

9. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\frac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdots(2n)}]^p\frac{1}{n^q}$.

$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{q+\frac{p}{2}}{n}+o(\frac{1}{n})$, па ред конвергира по Раабеу за $q+\frac{p}{2}>1$.

(Гаусов тест) Нека за ред с позитивним члановима важи $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, $|\theta_n|<C$, $\varepsilon>0$. За $\lambda>1$ или $\lambda=1$, $\mu>1$ ред конвергира, а за $\lambda<1$ или $\lambda=1$, $\mu<1$ ред дивергира.

10. Испитати конвергенцију хипергеометријског реда
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)}x^n$, где су $\alpha,\beta,\gamma,x>0$.

Имамо да важи $\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{\gamma}{n})}{(1+\frac{\alpha}{n})(1+\frac{\beta}{n})}$. Како је $(1+\frac{\alpha}{n})^{-1}=1-\frac{\alpha}{n}+\frac{\alpha^2}{1+\frac{\alpha}{n}}\frac{1}{n^2}$ и $(1+\frac{\beta}{n})^{-1}=1-\frac{\beta}{n}+\frac{\beta^2}{1+\frac{\beta}{n}}\frac{1}{n^2}$, то за $\gamma>\alpha+\beta$ ред конвергира, а дивергира за $\gamma\le\alpha+\beta$ по Гаусу.