Зимски семестар 2021/2022 Вежбе из Анализе 1
Зора Голубовић z.golubovic@yahoo.com

1 Прва недеља

1.1 Разни задаци

1. Доказати да за сваки реалан број x важи неједнакост $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$.

Решење. Доказаћемо прво неједнакост за $x \in [0, \frac{\pi}{2})$. Како је $\sin z < z$ за $z \in (0, 1)$, то је $\sin(\cos x) < \cos x$. На интервалу $[0, \frac{\pi}{2})$ функција $\cos x$ је опадајућа, па из $\sin x \leqslant x$ следи $\cos x \leqslant \cos(\sin x)$. Коначно, следи $\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$ за свако $x \in [0 \frac{\pi}{2})$. За $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ је $\sin(\cos x) \leqslant 0 < \cos(\sin x)$, тј. неједнакост важи. С обзиром на парност посматраних функција, неједнакост важи на интервалу $[-\pi, \pi]$. С обзиром на 2π-периодичност посматраних функција, неједнакост важи за свако $x \in \mathbb{R}$.

2. Решити $16^{\sin^2 x} + 16^{\cos^2 x} \leqslant 17$.

Решење. Приметимо да је $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Дакле, након смене $a = 16^{\sin^2 x}$, треба решити следеће $a + \frac{16}{a} \leqslant 17$. Како је $a > 0$, то је еквивалентно са $a^2 - 17a + 16 \leqslant 0$, односно са $(a - 16)(a - 1) \leqslant 0$. Одавде је $1 \leqslant a \leqslant 16$, односно $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$, што важи за свако $x \in \mathbb{R}$.

3. Нека је функција f дата са $f(x) = \frac{a^x}{a^x + \sqrt{a}}$, где је $x \in \mathbb{R}$ и $a > 0$. Одредити вредност збира $f(\frac{1}{2021}) + f(\frac{2}{2021}) + \cdots + f(\frac{2020}{2021})$.

Решење. Функција f задовољава идентитет $f(x) + f(1 - x) = 1$. Отуда је $f(\frac{1}{2021}) + f(\frac{2}{2021}) + \cdots + f(\frac{2020}{2021}) = (f(\frac{1}{2021}) + f(\frac{2020}{2021})) + (f(\frac{2}{2021}) + f(\frac{2019}{2021})) + \cdots + (f(\frac{1010}{2021}) + f(\frac{1011}{2021})) = 1010$.

4. Да ли је број $1,000001^{0,999999} \cdot 0,999999^{1,000001}$ већи или мањи од 1?

Решење. Нека је $\varepsilon = 0,000001 = 10^{-6}$. Тада је $1,000001^{0,999999} \cdot 0,999999^{1,000001} = (1 + \varepsilon)^{1-\varepsilon} \cdot (1 - \varepsilon)^{1+\varepsilon} = (\frac{1}{1+\varepsilon})^{2\varepsilon}(1 - \varepsilon^2)^{1+\varepsilon} < 1 \cdot 1 = 1$.

5. Рационалисати разломак $\frac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$.

Решење. Увођењем смене $x=\sqrt[3]{2}$ добијамо

$$\frac{1}{1+3\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{1+3x+2x^2}=\frac{1}{(x+1)(2x+1)}\cdot\frac{x^2-x+1}{x^2-x+1}\cdot\frac{4x^2-2x+1}{4x^2-2x+1}=\frac{(x^2-x+1)(4x^2-2x+1)}{(x^3+1)(8x^3+1)}=\frac{7\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{2}-11}{51}.$$

6. Решити једначину $\log_2\left(xy+\frac{1}{xy}\right)=1-(x+y-2)^2$ у скупу реалних бројева.

Решење. Из дефиниције логаритма следи $xy>0$, одакле следи $xy+\frac{1}{xy}\geqslant 2$, при чему једнакост важи за $xy=1$. Даље је $\log_2\left(xy+\frac{1}{xy}\right)\geqslant 1$. Како је $1-(x+y-2)^2\leqslant 1$, то мора да важи једнакост у неједнакости. Дакле,

$$xy=1,$$
$$x+y=2.$$

одакле се добија јединствено решење $x=y=1$.

7. Решити $4^{x+1}\cdot 3^{x-1}<48\cdot 2^x$.

Решење. Имамо да је $2^{2x}\cdot 4\cdot 3^x\cdot\frac{1}{3}<48\cdot 2^x$, што је еквивалентно са $6^x<36$, односно са $x<2$.

8. Доказати неједнакост $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$.

Решење. Нека је $a=\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}$ и $b=\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}$. Тада је $a^3+b^3=6$. Како је $a^2-ab+b^2>ab$, то важи $(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)<4(a^3+b^3)$, одакле следи жељена неједнакост.

9. Нека су x_1 и x_2 решења једначине $ax^2+(7a+4)x-4=0$. Одредити све вредности параметра a за које је $1<x_1<2$ и $x_2>2$.

Решење. Како су оба решења позитивна, то је $x_1x_2=-\frac{4}{a}>0$, односно $a<0$. Дакле, парабола која представља график функције је окренута врхом нагоре. Како је $1<x_1<2$ и $x_2>2$, то је $f(1)<0$ и $f(2)>0$. Тако је

$$a+(7a+4)-4<0,$$
$$4a+2(7a+4)-4>0.$$

Прва неједнакост је већ констатована, а друга даје $a>-\frac{2}{9}$. Дакле, решења ће испуњавати наведене услове за $a\in(-\frac{2}{9},0)$.

10. Нека су x_1 и x_2 корени једначине $x^2-4ax+5a^2-6a=0$. Одредити све вредности параметра a за које је $|x_1-x_2|$ максимално.

Решење. Како је $(x_1-x_2)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=4(9-(a-3)^2)$, израз има максималну вредност за $a=3$.