Бројни редови

Зора Голубовић

5.10.2021. године

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ је бесконачни ред са општим чланом a_n, а $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ је n-та парцијална сума реда. Кажемо да ред конвергира ако конвергира низ његових парцијалних сума. Ако ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира, онда је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (неопходан услов конвергенције).

1. Нека је $a_0 \in \mathbb{R}$ и $a_{n+1} = cosa_n$, $n \geq 0$. Да ли ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ конвергира?

Очигледно је $0 \leq a_n \leq 1$, $n \geq 2$. Важи $a_{n+1} = \cos a_n \geq \cos 1 > 0$, одакле општи члан реда не тежи нули кад $n \to \infty$, па ред дивергира.

2. Хармонијски ред $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ дивергира.

Кошијевим критеријумом се показује да низ парцијалних сума није Кошијев. Нека је $\varepsilon < \frac{1}{2}$ и $m = 2n$, тада $|S_m - S_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} > \varepsilon$.

3. Геометријски ред $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$ конвергира.

Одредимо најпре парцијалну суму. Множењем суме $S_n = \sum_{k=1}^{n} q^k$ са q и одузимањем qS_n од S_n, добија се да се сви чланови сем првог и последњег пониште, па је $S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$. Сума реда је лимес низа парцијалних сума: $S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$.

(Кошијев став) Нека је a_n опадајући низ позитивних чланова. Тада су редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ еквиконвергентни.

4. Ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ конвергира за $\alpha > 1$.

Применом претходног Кошијевог става налазимо да је посматрани ред еквиконвергентан геометријском реду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^{\alpha-1}})^n$ који конвергира за $\alpha > 1$.

5. Наћи суму реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$.

Посматрајмо суме $S_1 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$ и $S_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{2n\pi}{3}}{2^n}$: $S_1 + iS_2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{cis(\frac{2n\pi}{3})}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{2})^n = \frac{\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{2}}{1 - \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{2}} = \frac{5}{7} + i\frac{\sqrt{3}}{7}$. Одавде је $S_1 = Re(\frac{5}{7} + i\frac{\sqrt{3}}{7}) = \frac{5}{7}$.

(Даламберов тест) Нека за чланове позитивног реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ постоји $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. За $l < 1$ ред конвергира, а за $l > 1$ дивергира.

6. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Конвергира по Даламберу, $l = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!^2}{(2(n+1))!}}{\frac{n!^2}{(2n)!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1$.

7. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1000^n}{n!}$.

Конвергира по Даламберу, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1000^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{1000^n}{n!}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000}{n+1} = 0 < 1$.

8. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$.

Дивергира по Даламберу, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{(\frac{n+1}{n})^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{(1+\frac{1}{n})^n} = \frac{3}{e} > 1$.

(Кошијев тест) Нека за чланове позитивног реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ постоји $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. За $l < 1$ ред конвергира, а за $l > 1$ дивергира.

9. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$.

Конвергира по Кошију, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{n-1}{n+1})^{(n-1)} = \lim\limits_{n\to\infty} (1 - \frac{2}{n+1})^{(\frac{-(n+1)}{2})(\frac{n-1}{-2(n+1)})} = e^{-\frac{1}{2}} < 1$.

10. Испитати конвергенцију реда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^5}{2^n+3^n}$.

Конвергира по Кошију, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^5}{2^n+3^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3} \sqrt[n]{\frac{n^5}{1+(\frac{2}{3})^n}} = \frac{1}{3} < 1$.