Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р смер) - испитни рок септембар 2
25.9.2021.

1. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор с мером. Нека је $\mathfrak{N} = \{N \in \mathfrak{M} \mid \mu(N) = 0\}$ и

$$\overline{\mathfrak{M}} = \{A \cup F \mid A \in \mathfrak{M} \text{ и } F \subseteq N, \text{ за неки } N \in \mathfrak{N}\}.$$

   а) [5] Доказати да је $\overline{\mathfrak{M}}$ σ-алгебра и да важи $\mathfrak{M} \subseteq \overline{\mathfrak{M}}$.

   Дефинишимо $\overline{\mu}(E) = \mu(A)$, при чему је $E = A \cup F$, где $A \in \mathfrak{M}$ и $F \subseteq N$, за неки $N \in \mathfrak{N}$.

   б) [5] Доказати да је $\overline{\mu}$ добро дефинисана функција на $\overline{\mathfrak{M}}$ и да је $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$ за све $A \in \mathfrak{M}$ (тј. да је $\overline{\mu}$ екстензија мере μ).

   в) [5] Доказати да је $\overline{\mu}$ мера на $\overline{\mathfrak{M}}$.

   г) [5] Доказати да је мера $\overline{\mu}$ комплетна.

   д) Доказати да је $\overline{\mu}$ јединствена комплетна екстензија мере μ на $\overline{\mathfrak{M}}$.

   ђ) Ако је $E \in \overline{\mathfrak{M}}$ такав да је $\overline{\mu}(E) = 0$, доказати да постоји $B \in \mathfrak{M}$ такав да је $\mu(B) = 0$ и $E \subseteq B$.

   Примери д) и ђ) су бонус у вредности од 5 поена.

   Нека је дат простор са Бореловом мером $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$.

   1.1. [5] Дефинисати Борелову σ-алгебру $\mathcal{B}$.

   1.2. [10] Доказати да за сваки Лебегов скуп $E \in \mathfrak{M}_L$ постоје Борелови скупови A и B такви да важи $A \subset E \subset B$ и $\mu(B \setminus A) = 0$.

   1.3. [5] Описати шта је $\overline{\mathcal{B}}$, у смислу горе наведене дефиниције.

2. а) [10] Доказати теорему о доминантној конвергенцији.

   б) [8] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_0^{2022} n \cdot e^{\frac{-nx}{1+2021x}}\, dx.$

   в) [7] Да ли низ функција $f_n(x) = n \cdot e^{\frac{-nx}{1+2021x}}$ има интеграбилну доминанту на сегменту $[0, 2022]$?

3. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор с мером.

   а) [15] Доказати да је $L^p(X, \mu)$ Банахов простор. (Теорема Рис-Фишер)

   б) [10] Нека је f_n Кошијев низ на $L^p(X, \mu)$ простору. Да ли тада f_n конвергира по мери?

4. [10] Нека $f \in L^p([0,1], m)$ за $1 < p < +\infty$, при чему је m Лебегова мера. Нека је q такав да је $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Израчунати

$$\lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{q}} \int\limits_0^{\frac{1}{e^n}} |f|\, dm.$$

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки задатак носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

Решења

1. а) Покажимо прво $\mathfrak{M} \subset \overline{\mathfrak{M}}$. Нека је $A \in \mathfrak{M}$ произвољан скуп. Пошто је празан скуп подскуп сваког скупа, онда важи $\emptyset \subset N$, за произвољни скуп $N \in \mathfrak{N}$. Тада је $A = A \cup \emptyset \in \overline{\mathfrak{M}}$.

Покажимо да је $\overline{\mathfrak{M}}$ једна σ-алгебра:

1) $\emptyset \in \mathfrak{M} \subset \overline{\mathfrak{M}}$.

2) Нека је $E \in \overline{\mathfrak{M}}$ произвољан скуп. Треба показати $E^c \in \overline{\mathfrak{M}}$. Пошто је $E = A \cup F$, при чему важе претпоставке из поставке задатка, онда је $A \cup F \subset A \cup N$, па је $(A \cup N)^c \subset (A \cup F)^c$. Важи

$$(A \cup F)^c = (A \cup N)^c \cup ((A \cup F)^c \backslash (A \cup N)^c).$$

Покажимо да ово разлагање задовољава услове за припадност $\overline{\mathfrak{M}}$. Прво имамо $(A \cup N)^c = A^c \cap N^c \in \mathfrak{M}$. Даље важи $((A \cup F)^c \backslash (A \cup N)^c) = (A^c \cap F^c) \cap (A \cup N) \subset F^c \cap N \subset N$. Дакле, ово разлагање задовољава тражене услове, па важи $E^c \in \overline{\mathfrak{M}}$.

3) Нека је $E_n \in \overline{\mathfrak{M}}$, за све $n \in \mathbb{N}$. Треба показати $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \overline{\mathfrak{M}}$. За свако $n \in \mathbb{N}$ важи $E_n = A_n \cup F_n$, за неко $A_n \in \mathfrak{M}$ и неко $F_n \subset N_n$, где је $N_n \in \mathfrak{N}$. Тада важи

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup F_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Пошто је $\mathfrak{M}$ једна σ-алгебра, онда важи $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{M}$. Даље, пошто је $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$ и $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(N_n) = 0$ онда важи $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n \subset \mathfrak{N}$. Дакле, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \in \overline{\mathfrak{M}}$.

б) Важи $\overline{\mu}(A) = \overline{\mu}(A \cup \emptyset) = \mu(A)$. Треба показати још да функција $\overline{\mu}$ не зависи од избора разлагања скупа $E \in \overline{\mathfrak{M}}$. Дакле, ако је $E = A_1 \cup F_1 = A_2 \cup F_2$, за неке скупове $A_1, A_2 \in \mathfrak{M}$ и скупове $F_1 \subset N_1, F_2 \subset N_2$, где $N_1, N_2 \in \mathfrak{N}$, треба показати да је $\mu(A_1) = \mu(A_2)$. Важи $\mu(A_1 \cup N_1) = \mu(A_1) + \mu(N_1 \backslash A_1) = \mu(A_1)$ и слично $\mu(A_2 \cup N_2) = \mu(A_2)$. Даље је $A_1 \subset A_1 \cup F_1 = A_2 \cup F_2 \subset A_2 \cup N_2$, па на основу монотоности мере μ следи $\mu(A_1) \leq \mu(A_2 \cup N_2) = \mu(A_2)$. Слично се показује $\mu(A_2) \leq \mu(A_1 \cup N_1) = \mu(A_1)$. Дакле, $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

в) 1) $\overline{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

2) Треба показати $\overline{\mu}\Big(\bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n)$, за произвољне дисјунктне скупове $E_n \in \overline{\mathfrak{M}}$. Пошто је $E_n = A_n \cup F_n$, за све $n \in \mathbb{N}$, онда је $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$, као што је горе показано. Следи,

$$\overline{\mu}\Big(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \overset{*}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n),$$

при чему једнакост $*$ важи зато што је μ мера.

г) Нека је $E \in \overline{\mathfrak{M}}$ произвољан скуп такав да важи $\overline{\mu}(E) = 0$. Треба показати да ако је $S \subset E$ произвољан подскуп, онда важи и $S \in \overline{\mathfrak{M}}$. Посматрамо произвољно разлагање скупа $E = A \cup F$, при чему је $F \subset N$ и $\mu(N) = 0$. Пошто је $A \cup F \subset A \cup N$ и $\mu(A \cup N) \leq \mu(A) \cup \mu(N) = 0$ онда важи $A \cup N \in \mathfrak{N}$ па скуп E можемо разложити и на следећи начин $E = \emptyset \cup (A \cup F)$. Тада је

$$S = \emptyset \cup (S \cap (A \cup F))$$

и важи $S \cap (A \cup F) \subset A \cup F$, при чему је $A \cup F \in \mathfrak{N}$. Дакле, $S \in \overline{\mathfrak{M}}$.

д) Претпоставимо да је мера λ комплетна екстензија мере μ. Докажимо да је $\lambda = \overline{\mu}$. Најпре, како је λ екстензија μ, то је $\lambda(A) = \mu(A)$ за све $A \in \mathfrak{M}$. Ако је $F \subseteq N$ за неки $N \in \mathfrak{N}$, тада је $F = \emptyset \cup F$ па је $\lambda(F) \leqslant \lambda(N) = \mu(N) = 0$, па је $\lambda(F) = 0$ (овде смо користили да је λ комплетна мера па можемо измерити F, као и да се λ и μ поклапају на $N \in \mathfrak{M}$). Узмимо сада $E = A \cup F$, $E \in \overline{\mathfrak{M}}$. Тада можемо претпоставити да је $A \cap F = \emptyset$ (просто, ако нису дисјунктни посматрајмо $F' = F \setminus A$ уместо F и поново важи $A \cup F = A \cup F'$ и све остале претпоставке). Тада је

$$\lambda(E) = \lambda(A \sqcup F) = \lambda(A) + \lambda(F) = \lambda(A) = \mu(A) = \overline{\mu}(E),$$

при чему смо у другој једнакости искористили дефиницију мере, у трећој да се μ и λ поклапају на $\mathfrak{M}$ и у последњој дефинцију $\overline{\mu}$. Тиме смо доказали да је $\lambda = \overline{\mu}$.

ђ) Представимо $E \in \overline{\mathfrak{M}}$ као $E = A \cup F$, при чему важе претпоставке из поставке задатка. Како је $0 = \overline{\mu}(E) = \mu(A)$, то скуп $A \in \mathfrak{N}$. За B је онда довољно узети $B = A \cup N \in \mathfrak{M}$ (где је $N \in \mathfrak{M}$ из дефиниције такво да $F \subseteq N$), јер је $\mu(B) = 0$.

1.1. Поглавље 2.10. у књизи. (1. недеља на е-настави.)

1.2. Став 2.30 (в) у књизи (5. недеља на е-настави.)

1.3. Покажимо да је $\overline{\mathcal{B}} = \mathfrak{M}_L$, тј. Лебегова σ-алгебра. Нека је $E \in \mathfrak{M}_L$ произвољан скуп. На основу дела 1.2. знамо да постоје скупови $A, B \in \mathcal{B}$ тако да важи $A \subset E \subset B$ и $\mu(B \backslash A) = 0$. Приметимо да важи

$$E = A \cup (E \backslash A),$$

при чему је $A \in \mathcal{B}$ и $E \backslash A \subset B \backslash A$, а $\mu(B \backslash A) = 0$. Дакле, $E \in \overline{\mathcal{B}}$. Тиме смо показали $\mathfrak{M}_L \subset \overline{\mathcal{B}}$. Нека је сада $E = A \cup F \in \overline{\mathcal{B}}$ произвољан скуп. Поштто је $A \in \mathcal{B}$, а знамо $\mathcal{B} \subset \mathfrak{M}_L$, онда је и $A \in \mathfrak{M}_L$. Даље, пошто је $F \subset N$, $N \in \mathcal{B}$, $\mu(N) = 0$, онда је $N \in \mathfrak{M}_L$ и пошто је Лебегова мера комплетна важи и $F \in \mathfrak{M}_L$. Дакле $E = A \cup F \in \mathfrak{M}_L$. Тиме смо показали и $\overline{\mathcal{B}} \subset \mathfrak{M}_L$.

2. а) Теорема 3.24. у књизи.

б) Најпре уведимо смену $nx = t$. Тада је

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2022} n \cdot e^{\frac{-nx}{1+2021x}}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2022n} e^{\frac{-t}{1+2021\frac{t}{n}}}\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \chi_{[0,2022n]}(t) e^{\frac{-t}{1+2021\frac{t}{n}}}\, dt.$$

Приметимо да је $\frac{t}{n} \leqslant 2022$ за $t \in [0, 2022n]$, па је $\chi_{[0,2022n]}(t) e^{\frac{-t}{1+2021\frac{t}{n}}} \leqslant e^{-\frac{t}{1+2021\cdot 2022}}$, а $\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{t}{1+2021\cdot 2022}}\, dt$ конвергира па смо нашли интеграбилну доминанту и можемо применити ТДК. Даље је онда

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2022} n \cdot e^{\frac{-nx}{1+2021x}}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \chi_{[0,2022n]}(t) e^{\frac{-t}{1+2021\frac{t}{n}}}\, dt = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \chi_{[0,2022n]}(t) e^{\frac{-t}{1+2021\frac{t}{n}}}\, dt = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1,$$

при чему смо искористили да је $\lim\limits_{n\to\infty} \chi_{[0,2022n]}(t) = 1$ и да је $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{t}{n} = 0$.

в) Ако би постојала интеграбилна доминанта, тада би по делу под б) (за прву једнакост) и по ТДК (за другу) важило

$$1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2022} n \cdot e^{\frac{-nx}{1+2021x}}\, dx = \int_0^{2022} \lim_{n\to\infty} n \cdot e^{\frac{-nx}{1+2021x}}\, dx = 0,$$

јер за све $x > 0$ важи да је $\lim\limits_{n\to\infty} n \cdot e^{\frac{-nx}{1+2021x}} = 0$ јер је експоненцијална функција јача. У тачки $x = 0$ овај лимес додуше хоће бити бесконачно, али како је једна тачка скуп Лебегове мере нула, то нема утицаја на вредност интеграла. Дакле, низ функција $f_n(x)$ нема интеграбилну доминанту на сегменту $[0, 2022]$.

3. а) Теорема 4.8. у књизи.

   б) Из дела под б), ако је f_n Кошијев следи да је он и конвергентан, тј. да постоји $f \in L^p(X,\mu)$ такво да $f_n \xrightarrow{L^p} f$. Из чињенице да конвергенција у L^p простору повлачи конвергенцију по мери (став 4.23. у књизи) следи да f_n конвергира по мери.

4. Применимо Хелдерову неједнакост (са коефијентима p и q) на наведени интеграл записавши $|f| = |f| \cdot 1$. Добијамо

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{q}} \int\limits_0^{\frac{1}{e^n}} |f|\,dm = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{q}} \int\limits_0^{\frac{1}{e^n}} |f| \cdot 1\,dm &\leqslant \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{q}} \left(\int\limits_0^{\frac{1}{e^n}} |f|^p\,dm \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_0^{\frac{1}{e^n}} 1^q\,dm \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n}{q}} \left(\int\limits_0^{\frac{1}{e^n}} |f|^p\,dm \right)^{\frac{1}{p}} e^{-\frac{n}{q}} \\
&= \left(\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \chi_{\left(0,\frac{1}{e^n}\right)} |f|^p\,dm \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} \chi_{\left(0,\frac{1}{e^n}\right)} |f|^p\,dm \right)^{\frac{1}{p}} = 0,
\end{aligned}$$

при чему је улазак лимеса под интеграл дозвољен захваљујући теореми о доминантној конвергенцији, јер је $\chi_{\left(0,\frac{1}{e^n}\right)}|f|^p \leqslant |f|^p$, а $\int\limits_0^1 |f|^p\,dm < +\infty$ јер $f \in L^p([0,1], m)$.