Математика 2ц

Зора Голубовић

22.2.2021. године

1 Задаци за вјежбу

1. Израчунати детерминанте:

а) $\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon^2 & 1 \end{vmatrix}$, за $\varepsilon = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$,

б) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$,

в) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$,

г) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$.

2. Израчунати сљедеће детерминанте реда n:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1... & 1 \\ . & . & . & .... & . \\ 1 & 1 & 1 & 1... & 0 \end{vmatrix}$,

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & ... & n \\ -1 & 0 & 3 & ... & n \\ -1 & -2 & 0 & ... & n \\ . & . & . & .... & . \\ -1 & -2 & -3 & ... & 0 \end{vmatrix}$.

в) $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & ... & 0 \\ . & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

г) $\begin{vmatrix} a & b & b & ... & b \\ b & a & b & ... & b \\ . & . & . & .... & . \\ b & b & b & ... & a \end{vmatrix}$.

д) $\begin{vmatrix} 9 & 5 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 4 & 9 & 5 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 5 & ... & 0 & 0 \\ . & . & . & . & .... & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & ... & 4 & 9 \end{vmatrix}$.

3. Крамеровим методом детерминанти/Гаусовим методом елиминације решити системе једначина:

а)
$2x+3y+5z=10,$
$3x+7x+4z=3,$
$x+2y+2z=3.$

б)
$5x-6y+4z=3,$
$3x-3x+2z=1,$
$4x-5y+2z=1.$

в)
$4x-3y+2z+4=0,$
$6x-2x+3z+1=0,$
$5x-3y+2z+3=0.$

г)
$5x-2y+3z+2=0,$
$2x-2x+5z=0,$
$3x+4y+2z+10=0.$

д)
$2x+2y-z+u=4,$
$4x+3yz+2u=6,$
$8x+5y-3z+4u=12,$
$3x+3y-2z+2u=6,$

ђ)
$2x+3y+11z+5u=2,$
$x+y+5z+2u=1,$
$2x+y+3z+2u=-3,$
$x+y+3z+4u=-3.$

4. Нека је $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$

Наћи A^n, A^{-1} и сопствене вредности и њима одговарајуће сопствене векторе за те матрице. Израчунати $\det A^n, \det A^T, \det\left(AA^T\right), \det(A^TA)$.

5. Наћи $(A+B)^2$ и $(A+B)^3$ ако је $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.

6. Нека је дата матрица

$$A=\begin{pmatrix}7 & 4 & -1\\ 4 & 7 & -1\\ -4 & -4 & 4\end{pmatrix}$$

а) Наћи минималан и карактеристичан полином матрице.
б) Израчунати $p(A)$, $q(A)$ за $p(x)=x^4-x^2+1$, $q(x)=x^3-1$.
в) Наћи инверз матрице, по формули и применом Кејли-Хамилтонове теореме.

7. Нека је дата матрица

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

а) Наћи минималан и карактеристичан полином матрице.
б) Израчунати $p(A)$, $q(A)$ за $p(x) = x^3 + x^2 + 1$, $q(x) = x^2 + 1$.
в) Наћи инверз матрице, по формули и применом Кејли-Хамилтонове теореме.