Функционална анализа

В, Р смер

6.3.2021. године

1 Апсолутно-непрекидне и функције ограничене варијације

Задатак. Нека је

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0,1], \\ 0, & x \in (1,2], \\ -x+3, & x \in (2,3]. \end{cases}$$

Одредити $V_f(x) = V_0^x f$ за $x \in [0,3]$ и написати f као разлику две монотоне функције.

Задатак. Доказати да је $\{f : [a,b] \to \mathbb{C} : (\exists M) f(x) - f(y) \leq M|x-y|\}$ еквивалентно $\{f \in AC[a,b] : f' \in L^\infty[a,b]\}$.

Задатак. Нека је $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ непрекидна и конвексна функција. Доказати да је $f \in AC[a,b]$.

Задатак. Навести пример непрекидне функције која није ограничене варијације.

2 Банахови простори

Задатак. Простор ограничених низова m са нормом $x = (x_n)_{n=1}^\infty$, $\|x\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ јесте комплетан.

Задатак. Доказати да је простор конвергентних низова c са нормом $x \in c$, $\|x\| = \sup\limits_{\nu\in\mathbb{N}} |\xi_\nu|$ комплетан. Доказати да је $c_0 \subset c$, $c_0 = \{x \in c : \lim\limits_{\nu\to\infty} \xi_\nu = 0\}$ Банахов потпростор простора c.

Задатак. Нека је $C^k[a,b] = \{f : [a,b] \to C : f^{(k)}$ је непрекидан$\}$. Доказати да је C^k Банахов простор ако се норма уведе са $\|f\| = \sum\limits_{j=0}^{n} \max\limits_{a\leq t\leq b} |f^{(j)}(t)|$.

Задатак. Нека је $x_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}$. Да ли низ x_n конвергира у просторима $C[0,1]$ и $C^1[0,1]$

Задатак. Доказати да векторски простор свих полинома са нормом $\|p\| = \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$ није Банахов.

Задатак. Нека су X и Y Банахови простори и $f : X \to Y$ линеарно.
а) Ако је $A \subset X$ конвексан, онда је и $f(A)$ конвексан.
б) Ако је $B \subset Y$ конвексан, онда је и $f^{-1}(B)$ конвексан.
в) Ако је $\lambda \in \mathbb{C}$ и $A \subset X$ конвексан, онда је и λA конвексан.
г) Ако је $A \subset X$ конвексан, онда је и $\overline{A}$ такође конвексан.

Задатак. Нека је Y Банахов простор. Показати да је $l^\infty(Y) = \{(y_n)_{n=1}^\infty : \sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\| < \infty\}$ такође Банахов.

Задатак. Нека је Y комплексан Банахов простор и $X = \{f : [0,\infty) \to Y : f$ је непрекидна и постоји $\lim\limits_{x\to}$
Доказати да је X векторски простор над $\mathbb{C}$ и да је пресликавање $\|x\|_X : X \to [0,\infty)$ једна добро дефинисана норма на X која га чини Банаховим простором.

Задатак. Нека је $X = \{(x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in \mathbb{C}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sup\limits_{k\geq n} |x_k|^2 < \infty\}$.
а) Доказати да је X Банахов простор када се на њему уведе норма дефинисана са $\|x\|_X = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \sup\limits_{k\geq n} |x_k|^2$.
б) Доказати да је $X \subset l^2$.

Задатак. Нека је X векторски простор свих низова $x = (\xi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ за које конвергира ред $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_{n+1} - \xi_n|$. Доказати да је простор X са нормом $\|x\| = |\xi_1| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_{n+1} - \xi_n|$ Банахов.

Задатак. Ако је K компактан тополошки простор, а Y Банахов простор, показати да је векторски простор $C(K,Y)$ свих непрекидних функција из K у Y затворен потпростор од $B(K,Y)$, па је и сам Банахов простор у коме се норма може изразити и са $\|f\|_u = \max\limits_{x\in K} \|f(x)\|_Y$ за све $f \in C(K,Y)$.

Задатак. Показати да је простор $NBV[a,b]$ нормализованих функција ограничене варијације на сегменту $[a,b]$ са нормом $\|f\|_{NBV[a,b]} = V_a^b f$ за све $f \in NBV[a,b]$ Банахов за сваки сегмент $[a,b]$ у $\mathbb{R}$.

Задатак. Нека је (X,d) метрички, Y Банахов простор и нека је $0 < \alpha \leq 1$. Означимо са $Lip_\alpha(X,Y)$ скуп свих ограничених, Хелдер непрекидних на X (са степеном α) и Y вредносних функција f, т.ј. таквих да постоји константа C таква да је $\|f(x) - f(y)\|_Y \leq Cd(x,y)^\alpha$ за све $x, y \in X$, па дефинишемо $\|f\|_\alpha = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_Y + \sup_{x,y\in X, x\neq y} \frac{\|f(x)-f(y)\|_Y}{d(x,y)^\alpha}$. Доказати да је овим дата норма на $Lip_\alpha(X,Y)$ која га чини Банаховим простором.

3 Оператори, функционали

Задатак. Испитати да ли је $A : X \to Y$, $y = Ax$ ограничен и оценити му норму:
$X = Y = C[0,1]$
$x(t) \mapsto y(s) = \int\limits_0^s x(t)dt$.

Задатак. Испитати да ли је $A : X \to Y$, $y = Ax$ ограничен и оценити му норму:
$X = Y = C[0,1]$
$x(t) \mapsto y(t) = t^2 \cdot x(0)$.

Задатак. Испитати да ли је $f : C[-1,1] \to C[-1,1]$ $f(x) = \int\limits_{-1}^{0} x(t)dt - \int\limits_{0}^{1} x(t)dt$ ограничен и оценити му норму.

Задатак. Испитати да ли је $f : C[0,1] \to \mathbb{C}$ $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2^j} x(\frac{1}{j})$ ограничен и оценити му норму.

Задатак. Испитати да ли је $A : l^2(\mathbb{N}_0) \to l^2(\mathbb{N}_0)$ $y = Ax$, $\eta_j = \frac{1}{2^j} \sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \xi_i$ ограничен и оценити му норму.

Задатак. Испитати да ли је $P_n : L^1(0,\infty) \to L^1(0,\infty)$ $P_n f = \chi_{[0,n]} \cdot f$. а) Одредити $\|P_n\|$. б) Да ли постоји (и ако да, одредити га) $f \in L^1$ тако да $\|P_n f\|_1 \leq n^2$, $\|P_n \frac{1}{f}\| \leq 2021$ за све $n \in \mathbb{N}$.

Задатак. Нека је $A : C[-2,2] \to l^\infty(\mathbb{N})$ $\xi_n = f((-1)^n + \frac{1}{n})$, $Af = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Одредити $\|A\|$, испитати да ли је "1-1", "на"и наћи $A(C[-2,2])$.

Задатак. Нека је $L : C^{(1)}[0,1] \to C[0,1]$ $L(x(t)) = x(t) + \tan t \cdot x'(t)$. Да ли је ограничен оператор, одредити му норму ако јесте?

Задатак. Испитати слабу конвергенцију низа $f_n(t) = \frac{n^2 \sqrt[3]{t}}{1+nt^4}$ у $C[0,1]$.

Задатак. Испитати слабу конвергенцију низа $(0,\dots 0, n^a, 0, \dots)$ у l^p.

Задатак. Нека је $f \in C[0,1]$. Израчунати $\lim\limits_{x\to 1-} (1-x) \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n f(x^n)$.

Задатак. Нека је $f \in C[0,1]^2$. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} (\frac{(2n+1)!}{(n!)^2})^2 \int\int_{[0,1]\times[0,1]} (xy(1-x)(1-y))^n f(x,y) dxdy$.

Задатак. Нека је $f \in C[0,1]$. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} x(\frac{k}{n})$.

Задатак. Нека је $x = (\xi_k) \in c$. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=[en]}^{[\pi n]} \xi_k$.

Задатак. Испитати јаку конвергенцију низа оператора $A_n : C[0,1] \to C[0,1]$ задатог са $A_n(f(x)) = n \int_0^x x^{-n} y^{n-1} f(y) dy$.

Задатак. Доказати Риманову лему.

Задатак. Нека је $x = (\xi_n) \in l^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$ и $L_n(x) = \frac{1}{n^\alpha} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} L_n(x)$.

Задатак. Испитати слабу конвергенцију низа $x_n = \sin nt$ у простору $L^p(0,2\pi)$, $1 < p < \infty$.

4 Хилбертови простори

Задатак. $M = \{x \in l^2 : \sum\limits_{n=1}^{18} x_n = \sum\limits_{n=1}^{5} = \sum\limits_{n=1}^{2010} = 0\}$. Одредити M, $(M^\perp)^\perp$, $d(y,M)$, $d(z,M)$, где је $y = (18, 5, 2010, 0, \dots)$, $z = (1,1,1\dots)$.

Задатак. Одредити $\min\limits_{a,b,c\in\mathbb{C}} \int\limits_0^\infty |a + b + cx^2 + x^3|^2 e^{-x} dx$.