ВЕРОВАТНОЋА И СТАТИСТИКА Б (4МНЛ) - Писмени испит 24.9.2020.

1. Нека је (X_n) низ случајних величина таквих да је дводимензионална густина случајних величина X_i и X_j за свако i и свако j, $i \neq j$:

$$f_{X_i,X_j}(x,y) = \begin{cases} 4i^2j^2xy, & 0 \leq x \leq \frac{1}{i},\ 0 \leq y \leq \frac{1}{j}, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Испитати да ли за овај низ важи закон великих бројева.

2. Обележје X има нормалну $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ расподелу, где је σ^2 познато. Истраживач жели да тестира хипотезу $H_0 : m = m_0$ против хипотезе $H_1 : m > m_0$ на основу узорка обима n користећи униформно најмоћнији тест. Ако је вероватноћа грешке прве врсте тог теста једнака 0.05, а моћ теста при алтернативи $m = m_0 + \frac{\sigma}{3}$ је бар 0.85, одредити најмању могућу вредност броја n.

3. Из популације чије обележје X има униформну $\mathcal{U}[-\theta, 2\theta]$, $\theta > 0$, расподелу извучен је узорак обима n. За оцену непознатог параметра θ на основу тог узорка предлажу се оцене T_1 и T_2, где је $T_1 = k\widehat{\theta}$ и $\widehat{\theta}$ оцена за θ добијена методом максималне веродостојности, а $T_2 = 2\overline{X}_n$. Одредити k тако да T_1 буде непристрасна оцена, а затим испитати која од предложених оцена је боља у средње квадратном смислу.