Решења задатака из јануарског рока из Линеарне алгебре и аналитичке геометрије

1. Дефинисати следеће појмове (1.1–1.5)

1.1. скаларни производ и ортогоналност вектора

Скаларни производ је функција $\langle \cdot,\cdot\rangle : V\times V\to\mathbb{R}$ таква да је (V је векторски простор)

1) $(\forall u,v,w\in V)\ \langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$

$(\forall u,v\in V)(\forall\lambda\in\mathbb{R})\ \langle\lambda u,v\rangle=\lambda\langle u,v\rangle$

2) $(\forall u,v\in V)\ \langle v,u\rangle=\langle u,v\rangle$

3) $(\forall u\in V)\ \langle u,u\rangle\geqslant 0$ и $\langle u,u\rangle=0$ акко је $u=0$.

Вектори u,v су ортогонални ако је $\langle u,v\rangle=0$.

1.2. сличност матрица и матрица дијагоналног типа

Матрице A и B су сличне ако постоји инвертибилна матрица P таква да је $B=P^{-1}AP$

Матрица A је дијагоналног типа ако је A слична некој дијагоналној матрици D.

1.3. линеарна независност вектора и база векторског простора V

Вектори $v_1,v_2,\dots,v_n\in V$ су линеарно независни ако је једина могућност да једнакост $\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_nv_n=0$ буде тачна та да бројеви $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ буду сви једнаки нули.

Вектори $v_1,v_2,\dots,v_n\in V$ чине базу векторског простора V ако су линеарно независни и за свако $v\in V$ постоје бројеви $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}$ такви да је $v=\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_nv_n$.

1.4. линеарни омотач скупа вектора $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}\subset V$.

Линеарни омотач скупа $S=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ је $\mathcal{L}(S)=\Omega(S)=\{\lambda_1v_1+\lambda_2v_2+\dots+\lambda_nv_n\mid\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n\in\mathbb{R}\}$.

1.5. језгро линеарног пресликавања $L:V\to W$

Језгро линеарног пресликавања $L:V\to W$ је скуп $\operatorname{Ker}L=\{v\in V\mid L(v)=0\}$,

1.6. Нека је V векторски простор и $U,W\leq V$ потпростори векторског простора V. Доказати да је сума потпростора $U+W$ директна (сваки елемент $v\in U+W$ се може на јединствен начин раставити као $v=u+w$, за неке $u\in U$ и $w\in W$) ако и само ако је $U\cap W=\{0\}$.

$\boxed{\Rightarrow}$: Нека је сума $U+W$ директна и $v\in U\cap W$ произвољан. Пошто $v\in U\cap W$, онда $v\in U$, а пошто је $v=v+0$, за $v\in U$ и $0\in W$, онда је $v\in U+W$. Међутим, пошто је $v\in W$, јер је $v\in U\cap W$, онда је и $v=0+v$, за $0\in U$ и $v\in W$. Овим су за елемент $v\in U+W$ пронађена два начина да се растави као $v=u+w$, за неке $u\in U$, $w\in W$ (први начин је $v=u_1+w_1$, $u_1=v\in U$, $w_1=0\in W$, а други начин је $v=u_2+w_2$, $u_2=0\in U$, $w_2=v\in W$). Сума је директна, па постоји само један начин да се елемент растави, тј. $u_1=u_2$ и $w_1=w_2$, тј. $v=0$ и $0=v$.

Дакле, $v=0$, па је $U\cap W=\{0\}$.

$\boxed{\Leftarrow}$: Нека је $U\cap W=\{0\}$ и $v\in U+W$ произвољан. Нека је $v=u_1+w_1=u_2+w_2$, тј. нека постоје два начина да се v растави. Нека је $u=u_1-u_2$. Тада је $u\in U$, али је $u_1-u_2=w_2-w_1\in W$, па је $u\in W$. Следи да $u\in U\cap W=\{0\}$, тј. да је $u=0$. Према томе, $u_1-u_2=w_2-w_1=0$, па је $u_1=u_2$ и $w_1=w_2$, што значи да је растављање јединствено, па је сума $U+W$ директна.

2. Нека је U потпростор векторског простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима $u_1=(1,3,-1,0,2)$, $u_2=(-1,-2,4,1,0)$ и $u_3=(2,5,-5,-1,2)$ и нека је W потпростор векторског простора $\mathbb{R}^5$ генерисан векторима $v_1=(1,1,-1,2,-3)$, $v_2=(2,3,1,5,-4)$ и $v_3=(-1,0,4,-1,5)$. Одредити бар једну базу и димензију векторских простора $U, W, U+W, U\cap W$. Да ли је сума $U+W$ директна?

$$\begin{array}{c} u_1\\ u_2\\ u_3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2\\ -1 & -2 & 4 & 1 & 0\\ 2 & 5 & -5 & -1 & 2 \end{bmatrix} /\cdot 1 \ \cdot(-2) \qquad \begin{array}{c} u_1\\ u_2+u_1\\ u_3-2u_1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -3 & -1 & -2 \end{bmatrix} /\cdot 1 \qquad \begin{array}{c} u_1\\ u_2+u_1\\ u_3-2u_1+u_2+u_1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$u_3-2u_1+u_2+u_1=0$

$-u_1+u_2+u_3=0$

Дакле, u_3 се може изразити преко u_1,u_2, па се може избацити из генератрисе. Такође, како су u_1,u_2 линеарно независни, следи да је $\{u_1,u_2\}$ база векторског простора U.

$$\begin{array}{c} v_1\\ v_2\\ v_3 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -3\\ 2 & 3 & 1 & 5 & -4\\ -1 & 0 & 4 & -1 & 5 \end{bmatrix} /\cdot(-2) \ \cdot 1 \qquad \begin{array}{c} v_1\\ v_2-2v_1\\ v_3+v_1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} /\cdot(-1) \qquad \begin{array}{c} v_1\\ v_2-2v_1\\ v_3+v_1-v_2+2v_1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$v_3+v_1-v_2+2v_1=0$

$3v_1-v_2+v_3=0$

Дакле, v_3 се може изразити преко v_1,v_2, па се може избацити из генератрисе. Такође, како су v_1,v_2 линеарно независни, следи да је $\{v_1,v_2\}$ база векторског простора W.

Како је $\{u_1,u_2\}$ база U и $\{v_1,v_2\}$ база W, следи да је $\{u_1,u_2,v_1,v_2\}$ генератриса векторског простора $U+W$.

$$\begin{array}{c} u_1\\ u_2\\ v_1\\ v_2 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2\\ -1 & -2 & 4 & 1 & 0\\ 1 & 1 & -1 & 2 & -3\\ 2 & 3 & 1 & 5 & -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} u_1\\ u_2+u_1\\ v_1-u_1\\ v_2-2u_1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2\\ 0 & -2 & 0 & 2 & -5\\ 0 & -3 & 3 & 5 & 0 \end{bmatrix} /\cdot 2 \ \cdot 3 \qquad \begin{array}{c} u_1\\ u_2+u_1\\ v_1-u_1+2u_2+2u_1\\ v_2-2u_1+3u_2+3u_1 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 6 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 12 & 8 & 6 \end{bmatrix} /\cdot(-2)$$

$$\begin{array}{c} u_1\\ u_2+u_1\\ v_1+2u_2+u_1\\ v_2+3u_2+u_1-2(v_1+2u_2+u_1) \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 6 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$v_2+3u_2+u_1-2v_1-4u_2-2u_1=0$

$-u_1-u_2-2v_1+v_2=0$

Дакле, v_2 се може изразити преко u_1,u_2,v_1, па се може избацити из генератрисе. Такође, како су u_1,u_2,v_1 линеарно независни, следи да је $\{u_1,u_2,v_1\}$ база за $U+W$.

Нека је $v\in U\cap W$. Тада је $v\in U$, па је $v=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2$, али је и $v\in W$, па је $v=\mu_1v_1+\mu_2v_2$. Следи да је

Дакле, $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2=\mu_1v_1+\mu_2v_2$, тј. $\lambda_1u_1+\lambda_2u_2-\mu_1v_1-\mu_2v_2=0$.

$(\lambda_1,3\lambda_1,-\lambda_1,0,2\lambda_1)+(-\lambda_2,-2\lambda_2,4\lambda_2,\lambda_2,0)-(\mu_1,\mu_1,-\mu_1,2\mu_1,-3\mu_1)-(2\mu_2,3\mu_2,\mu_2,5\mu_2,-4\mu_2)=(0,0,0,0,0)$

$$\begin{aligned} \lambda_1-\lambda_2-\mu_1-2\mu_2&=0 \ /\cdot(-3)\ \cdot 1\ \cdot(-2)\\ 3\lambda_1-2\lambda_2-\mu_1-3\mu_2&=0\\ -\lambda_1+4\lambda_2+\mu_1-\mu_2&=0\\ \lambda_2-2\mu_1-5\mu_2&=0\\ 2\lambda_1+3\mu_1+4\mu_2&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda_1-\lambda_2-\mu_1-2\mu_2&=0\\ \lambda_2+2\mu_1+3\mu_2&=0 \ /\cdot(-1)\ \cdot(-2)\\ 3\lambda_2-3\mu_2&=0 \ /:3\\ \lambda_2-2\mu_1-5\mu_2&=0\\ 2\lambda_2+5\mu_1+8\mu_2&=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \lambda_1-\lambda_2-\mu_1-2\mu_2&=0\\ \lambda_2+2\mu_1+3\mu_2&=0\\ \lambda_2-\mu_2&=0\\ -4\mu_1-8\mu_2&=0 \ /:(-4)\\ \mu_1+2\mu_2&=0 \end{aligned}$$

$\boxed{\mu_1=-2\mu_2}$ $\boxed{\lambda_2=\mu_2}$ $\boxed{\lambda_1=\mu_2}$

$\lambda_2+2\mu_1+3\mu_2=\mu_2-4\mu_2+3\mu_2=0$ ✓

$\lambda_1=\lambda_2+\mu_1+2\mu_2=\mu_2-2\mu_2+2\mu_2=\mu_2$

Дакле, $0=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2-\mu_1 v_1-\mu_2 v_2=\mu_2 u_1+\mu_2 u_2+2\mu_2 v_1-\mu_2 v_2=\mu_2(u_1+u_2+2v_1-v_2)$, па је $u_1+u_2+2v_1-v_2=0$ (јер претходна једнакост важи за све $\mu_2\in\mathbb{R}$, па специјално за $\mu_2=1$), тј. $u_1+u_2=-2v_1+v_2$. Такође, $v=\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2=\mu_2 u_1+\mu_2 u_2=\mu_2(u_1+u_2)$ (а и $v=\mu_1 v_1+\mu_2 v_2=-2\mu_2 v_1+\mu_2 v_2=\mu_2(-2v_1+v_2)$), па је u_1+u_2 (тј. $-2v_1+v_2$) база векторског простора $U\cap W$.

Приликом испитивања линеарне независности вектора u_1, u_2, v_1, v_2 добили смо да важи $-u_1-u_2-2v_1+v_2=0$, тј. $u_1+u_2=-2v_1+v_2$. Елемент u_1+u_2 припада U јер $u_1,u_2\in U$, а елемент $-2v_1+v_2$ припада W јер $v_1,v_2\in W$, па пошто је у питању исти елемент, он припада $U\cap W$. Из Грасманове формуле $\dim U+\dim W=\dim(U+W)+\dim(U\cap W)$ следи да је $2+2=3+\dim(U\cap W)$, тј. $\dim(U\cap W)=1$. Према томе, базу простора $U\cap W$ чини било који ненула елемент тог простора, па како је $u_1+u_2=-2v_1+v_2\neq 0$, следи да је u_1+u_2 (тј. $-2v_1+v_2$) база векторског простора $U\cap W$.

3. Нека је оператор $L:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ дат са $L(a,b,c,d)=(a+d,b-c,a+b,d)$. Доказати да је L линеаран оператор и одредити његово језгро и слику. Наћи матрицу оператора L у бази $E=\{(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$.

1° $L(0,0,0,0)=(0+0,0-0,0+0,0)=(0,0,0,0)$

2° $L((a,b,c,d)+(x,y,z,t))=L(a+x,b+y,c+z,d+t)=(a+x+d+t,\ b+y-c-z,\ a+x+b+y,\ d+t)=$
$=(a+d,b-c,a+b,d)+(x+t,y-z,x+y,t)=L(a,b,c,d)+L(x,y,z,t)$

3° $L(\lambda(a,b,c,d))=L(\lambda a,\lambda b,\lambda c,\lambda d)=(\lambda a+\lambda d,\lambda b-\lambda c,\lambda a+\lambda b,\lambda d)=\lambda(a+d,b-c,a+b,d)=\lambda L(a,b,c,d)$

Дакле, L је линеаран оператор.

$\operatorname{Ker} L=\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid L(a,b,c,d)=(0,0,0,0)\}$

$L(a,b,c,d)=(0,0,0,0)$

$(a+d,b-c,a+b,d)=(0,0,0,0)$

$a+d=0$

$b-c=0$

$a+b=0$

$d=0$

$\boxed{d=0}$ $\boxed{a=-d=0}$ $\boxed{b=-a=0}$ $\boxed{c=b=0}$

$\operatorname{Ker} L=\{(0,0,0,0)\}$

$\operatorname{Im} L=\{L(a,b,c,d)\mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$

$L(a,b,c,d)=(a+d,b-c,a+b,d)=a\cdot(1,0,1,0)+b\cdot(0,1,1,0)+c\cdot(0,-1,0,0)+d\cdot(1,0,0,1)$

$\operatorname{Im} L=\{a\cdot(1,0,1,0)+b\cdot(0,1,1,0)+c\cdot(0,-1,0,0)+d\cdot(1,0,0,1)\mid a,b,c,d\in\mathbb{R}\}$

$\operatorname{Im} L=\mathcal{L}((1,0,1,0),(0,1,1,0),(0,-1,0,0),(1,0,0,1))$

$L(e_1)=L(1,0,0,0)=(1+0,0-0,1+0,0)=(1,0,1,0)=1\cdot e_1+0\cdot e_2+1\cdot e_3+0\cdot e_4$

$L(e_2)=L(0,1,0,0)=(0+0,1-0,0+1,0)=(0,1,1,0)=0\cdot e_1+1\cdot e_2+1\cdot e_3+0\cdot e_4$

$L(e_3)=L(0,0,1,0)=(0+0,0-1,0+0,0)=(0,-1,0,0)=0\cdot e_1+(-1)\cdot e_2+0\cdot e_3+0\cdot e_4$

$L(e_4)=L(0,0,0,1)=(0+1,0-0,0+0,1)=(1,0,0,1)=1\cdot e_1+0\cdot e_2+0\cdot e_3+1\cdot e_4$

$$[L]_E=\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&-1&0\\1&1&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

4. Нека је U скуп решења једначине $x+2y-z-t=0$. Доказати да је U потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4$ и наћи неку његову базу. Грам-Шмитовим поступком ортогонализације од дате базе направити ортогоналну базу потпростора U, користећи стандардни скаларни производ у $\mathbb{R}^4$.

$U=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+2y-z-t=0\}$

1° $(0,0,0,0)\in U$ јер је $0+2\cdot0-0-0=0$

2° $(x,y,z,t),(a,b,c,d)\in U$

Да ли $(x,y,z,t)+(a,b,c,d)\in U$?

$(x,y,z,t)+(a,b,c,d)=(x+a,y+b,z+c,t+d)$

$x+a+2(y+b)-(z+c)-(t+d)=\underbrace{x+2y-z-t}_{0,\text{ јер }(x,y,z,t)\in U}+\underbrace{a+2b-c-d}_{0,\text{ јер }(a,b,c,d)\in U}=0+0=0$, па следи да $(x,y,z,t)+(a,b,c,d)\in U$

3° $(x,y,z,t)\in U$, $\lambda\in\mathbb{R}$

Да ли $\lambda(x,y,z,t)\in U$?

$\lambda(x,y,z,t)=(\lambda x,\lambda y,\lambda z,\lambda t)$

$\lambda x+2(\lambda y)-\lambda z-\lambda t=\lambda(\underbrace{x+2y-z-t}_{0,\text{ јер }(x,y,z,t)\in U})=\lambda\cdot 0=0$, па $\lambda(x,y,z,t)\in U$

Дакле, U је потпростор векторског простора $\mathbb{R}^4$.

$x+2y-z-t=0$

$t=x+2y-z$

$U=\{(x,y,z,x+2y-z)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}=\{x\cdot(1,0,0,1)+y\cdot(0,1,0,2)+z\cdot(0,0,1,-1)\mid x,y,z\in\mathbb{R}\}$

$f_1=(1,0,0,1)$, $f_2=(0,1,0,2)$, $f_3=(0,0,1,-1)$ чине генератрису простора U

$$\begin{array}{c} f_1\\ f_2\\ f_3\end{array}\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&-1\end{bmatrix}$$ Линеарно су независни, па је $\{f_1,f_2,f_3\}$ база векторског простора U.

$e_1=f_1=(1,0,0,1)$

$e_2=f_2-\dfrac{\langle f_2,e_1\rangle}{\langle e_1,e_1\rangle}e_1=(0,1,0,2)-\dfrac{2}{2}(1,0,0,1)=(0,1,0,2)-(1,0,0,1)=(-1,1,0,1)$

$\langle f_2,e_1\rangle=\langle(0,1,0,2),(1,0,0,1)\rangle=0+0+0+2=2$

$\langle e_1,e_1\rangle=\langle(1,0,0,1),(1,0,0,1)\rangle=1+0+0+1=2$

$e_3=f_3-\dfrac{\langle f_3,e_1\rangle}{\langle e_1,e_1\rangle}e_1-\dfrac{\langle f_3,e_2\rangle}{\langle e_2,e_2\rangle}e_2=(0,0,1,-1)-\dfrac{-1}{2}(1,0,0,1)-\dfrac{-1}{3}(-1,1,0,1)=(0,0,1,-1)+(\tfrac12,0,0,\tfrac12)+(-\tfrac13,\tfrac13,0,\tfrac13)=$
$=(\tfrac16,\tfrac13,1,-\tfrac16)$

$\langle f_3,e_1\rangle=\langle(0,0,1,-1),(1,0,0,1)\rangle=0+0+0-1=-1$

$\langle e_1,e_1\rangle=2$

$\langle f_3,e_2\rangle=\langle(0,0,1,-1),(-1,1,0,1)\rangle=0+0+0-1=-1$

$\langle e_2,e_2\rangle=\langle(-1,1,0,1),(-1,1,0,1)\rangle=1+1+0+1=3$

Једна ортогонална база векторског простора U је $\{(1,0,0,1),(-1,1,0,1),(\tfrac16,\tfrac13,1,-\tfrac16)\}$.

5. Нека су у равни дате праве $p:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}$ и $q: y=2x$. Одредити једначину праве n која садржи тачку пресека правих p и q и нормална је на праву $r: x+3y-1=0$.

$S(x_0,y_0)$ – тачка пресека правих p и q

$\dfrac{x_0-1}{2}=\dfrac{y_0-2}{1}$ јер $S\in p$

$y_0=2x_0$ јер $S\in q$

$x_0-1=2y_0-4=4x_0-4$

$3x_0=3$

$\boxed{x_0=1}$

$\boxed{y_0=2x_0=2}$

Права n је нормална на праву r, чији је вектор нормале $\vec{n_r}=(1,3)$, што значи да је тај вектор вектор правца праве n. Дакле,

$n:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{3}$, тј. $3x-3=y-2$, односно $3x-y-1=0$

6. Нека је $A:V\to V$ линеарни оператор такав да је $V=\mathrm{Ker}\,A\oplus \mathrm{Im}\,A$. Доказати да је $V=\mathrm{Ker}\,A^2\oplus \mathrm{Im}\,A^2$.

Нека је $v\in \mathrm{Ker}\,A^2$ произвољан. Тада је $A^2(v)=0$, тј. $A(A(v))=0$, па је $A(v)\in \mathrm{Ker}\,A$. Међутим, како је $A(v)\in \mathrm{Im}\,A$, следи да је $A(v)\in \mathrm{Ker}\,A\cap \mathrm{Im}\,A=\{0\}$, јер је сума $\mathrm{Ker}\,A\oplus \mathrm{Im}\,A$ директна, па је $A(v)=0$, односно $v\in \mathrm{Ker}\,A$. Овиме је доказано да је $\mathrm{Ker}\,A^2\subseteq \mathrm{Ker}\,A$. Обратно, ако је $v\in \mathrm{Ker}\,A$, онда је $A(v)=0$, па је $A^2(v)=A(A(v))=A(0)=0$, па $v\in \mathrm{Ker}\,A^2$. Према томе, $\mathrm{Ker}\,A\subseteq \mathrm{Ker}\,A^2$, па следи да је $\mathrm{Ker}\,A^2=\mathrm{Ker}\,A$.

Нека је $v\in \mathrm{Im}\,A^2$. Тада је $v=A^2(u)$, за неко $u\in V$, па је $v=A(A(u))$, тј. $v\in \mathrm{Im}\,A$. Дакле, доказано је да је $\mathrm{Im}\,A^2\subseteq \mathrm{Im}\,A$. Обратно, нека је $v\in \mathrm{Im}\,A$. Тада је $v=A(u)$, за неко $u\in V$. Како је $V=\mathrm{Ker}\,A\oplus \mathrm{Im}\,A$, постоје јединствени $u_1\in \mathrm{Ker}\,A$ и $u_2\in \mathrm{Im}\,A$ такви да је $u=u_1+u_2$. При томе, $A(u_1)=0$, јер је $u_1\in \mathrm{Ker}\,A$, а $u_2=A(w)$, за неко $w\in V$. Према томе, $v=A(u)=A(u_1+u_2)=A(u_1)+A(u_2)=0+A(A(w))=A^2(w)$, па је $v\in \mathrm{Im}\,A^2$. Следи да је $\mathrm{Im}\,A\subseteq \mathrm{Im}\,A^2$, па је $\mathrm{Im}\,A^2=\mathrm{Im}\,A$. Коначно, како је $V=\mathrm{Ker}\,A\oplus \mathrm{Im}\,A$ и $\mathrm{Ker}\,A^2=\mathrm{Ker}\,A$ и $\mathrm{Im}\,A^2=\mathrm{Im}\,A$, следи да је $V=\mathrm{Ker}\,A^2\oplus \mathrm{Im}\,A^2$, што је и требало доказати.