* Пресликавање $w=f(z)=z^2$

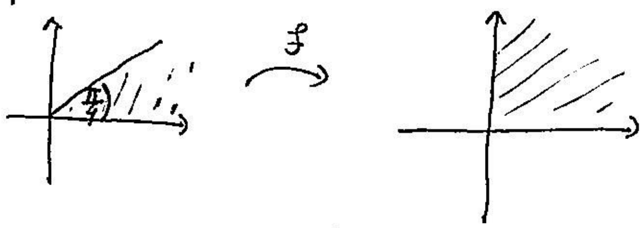
Нека је $S\subseteq \mathbb{C}$ такав да важи: $(\forall z_1,z_2\in S)\ z_1\neq z_2 \Rightarrow z_1+z_2\neq 0$

Тада је: $z_1^2=z_2^2 \Rightarrow (z_1-z_2)\underbrace{(z_1+z_2)}_{\neq 0}=0 \Rightarrow z_1=z_2$

тј. f је 1-1 на S

Примери:

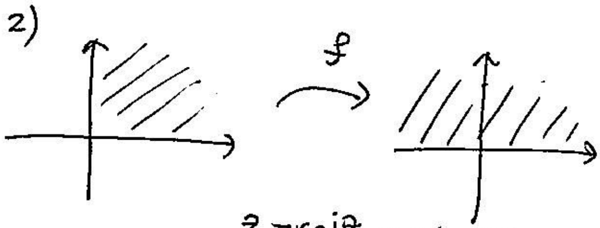
1)



$z=re^{i\theta},\ \theta\in(0,\frac{\pi}{4})$

$f(z)=z^2=r^2e^{2i\theta},\ 2\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$

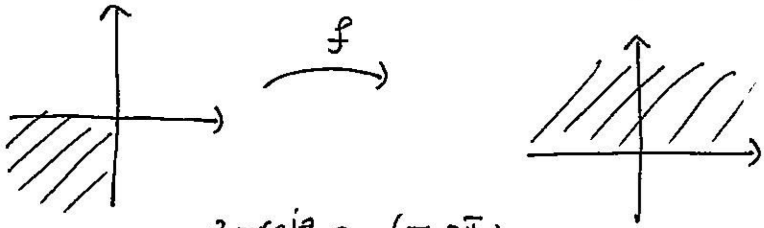
2)



$z=re^{i\theta},\ \theta\in(0,\frac{\pi}{2})$

$f(z)=r^2e^{2i\theta},\ 2\theta\in(0,\pi)$

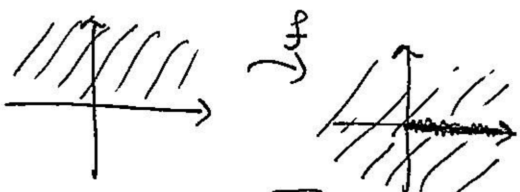
3)



$z=re^{i\theta},\ \theta\in(\pi,\frac{3\pi}{2})$

$f(z)=r^2e^{2i\theta},\ 2\theta\in(2\pi,3\pi)$

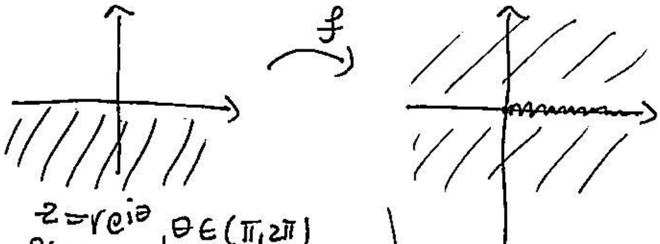
4)



$z=re^{i\theta},\ \theta\in(0,\pi)$ $\quad \mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$

$f(z)=r^2e^{2i\theta},\ 2\theta\in(0,2\pi)$

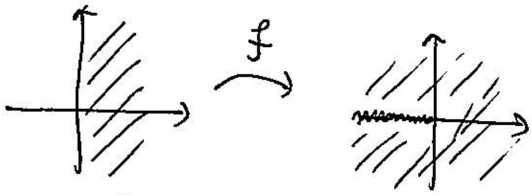
5)



$z=re^{i\theta},\ \theta\in(\pi,2\pi)$

$f(z)=r^2e^{2i\theta},\ 2\theta\in(2\pi,4\pi)$ $\quad \mathbb{C}\setminus[0,+\infty)$

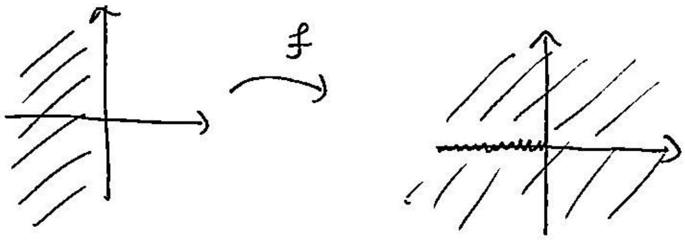
6)



$z=re^{i\theta},\ \theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ $\quad \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

$f(z)=r^2e^{2i\theta},\ 2\theta\in(-\pi,\pi)$

7)



$z=re^{i\theta},\ \theta\in(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ $\quad \mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

$f(z)=r^2e^{2i\theta},\ 2\theta\in(\pi,3\pi)$

⑤ Одредити $f(\mathbb{D})$ ако је $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$. (пазите – сада f није билинеарно)

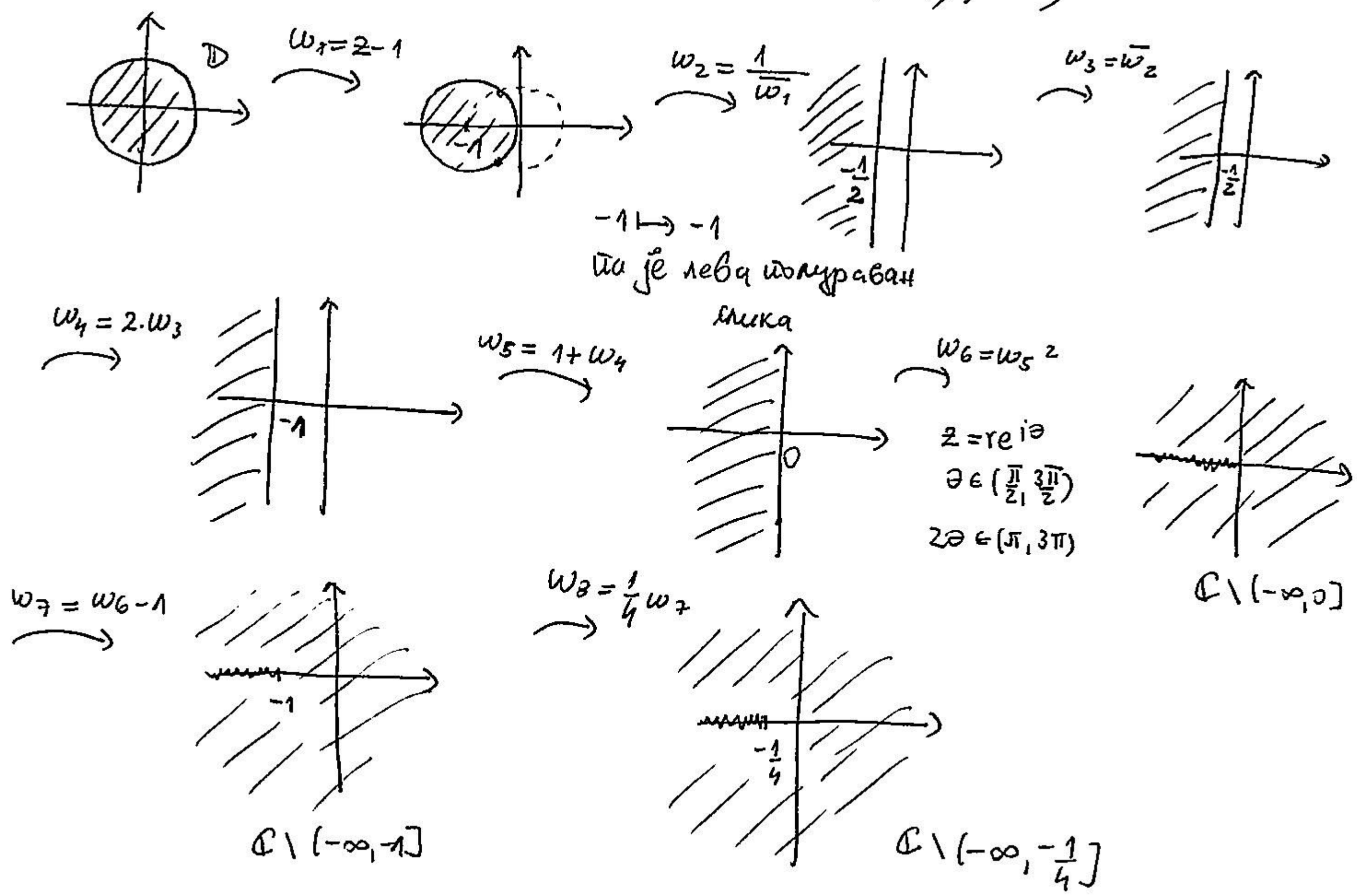
$$w=f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}=\frac{(1+z)^2-(1-z)^2}{4(1-z)^2}=\frac{1}{4}\Big(\underbrace{\Big(\frac{1+z}{1-z}\Big)}_{\text{билинеарно је!}}{}^2-1\Big)$$

$$\left.\begin{aligned}(1-z)^2&=1-2z+z^2\\(1+z)^2&=1+2z+z^2\end{aligned}\right\}\ (1+z)^2-(1-z)^2=4z$$

Записаћемо као композицију једноставнијих пресликавања:

$$w=f(z)=\frac{1}{4}\left(\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2-1\right)=\frac{1}{4}\left(\left(\frac{z-1+2}{z-1}\right)^2-1\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\left(1+\frac{2}{z-1}\right)^2-1\right)=\frac{1}{4}\left(\left(1+2\cdot\overline{\left(\frac{1}{\overline{z-1}}\right)}\right)^2-1\right)$$



<u>Напомена:</u> ф-ја $\frac{z}{(1-z)^2}$ се назива Кебеова ф-ја и игра битну улогу у геометријској теорији функција.

* функција Жуковског

$$w = \Delta(z) = \left(z+\frac{1}{z}\right)\cdot\frac{1}{2}, \quad z\in\mathbb{C}^\times = \mathbb{C}\setminus\{0\}$$

Нека је $S\subseteq\mathbb{C}$ такав да важи $(\forall z_1,z_2\in S)\ z_1\neq z_2 \Rightarrow z_1\cdot z_2\neq 1$

Тада је: $\Delta(z_1)=\Delta(z_2) \Rightarrow z_1+\frac{1}{z_1} = z_2+\frac{1}{z_2} \Rightarrow z_1-z_2+\frac{z_2-z_1}{z_1z_2}=0$

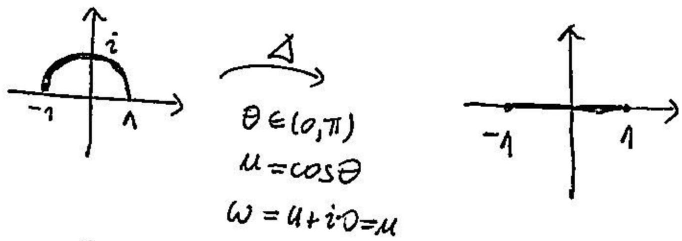
$$\Rightarrow (z_1-z_2)\underbrace{\left(1-\frac{1}{z_1z_2}\right)}_{\neq 0 \text{ на } S}=0 \Rightarrow z_1=z_2$$

тј Δ је 1-1 на S.

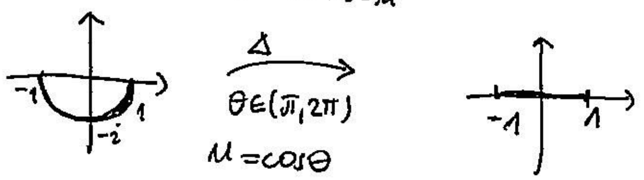
$z = re^{i\theta}\in\mathbb{C}^\times$, $w=\Delta(z)$

$$w=u+iv = \frac{1}{2}\left(re^{i\theta}+\frac{1}{re^{i\theta}}\right) = \frac{1}{2}\Big[\underbrace{\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\theta}_{2u} + i\cdot\underbrace{\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\theta}_{2v}\Big]$$

За $r=1$: $v=0$



слика горње полукружнице полупречника 1 је $(-1,1)$



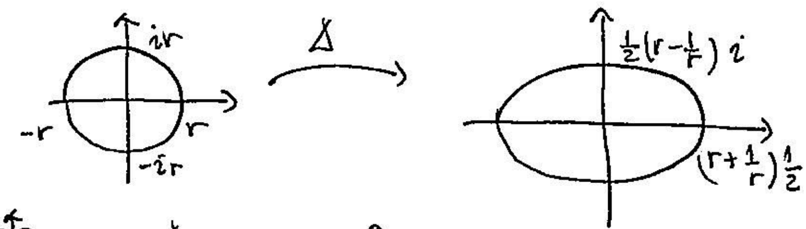
(такође и доле)

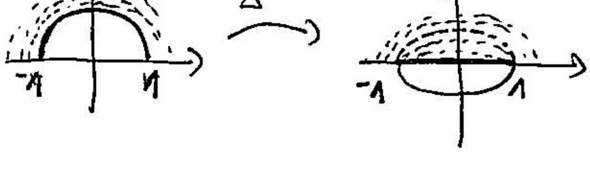
$\Delta(z)=\Delta\left(\frac{1}{z}\right)$ (јасно из деф да ово важи)

За $r\geq 1$: $|z|=r$ се тада слика на елипсу

$$\left(\frac{u}{\frac{1}{2}(r+\frac{1}{r})}\right)^2+\left(\frac{v}{\frac{1}{2}(r-\frac{1}{r})}\right)^2 = \cos^2\theta+\sin^2\theta = 1$$

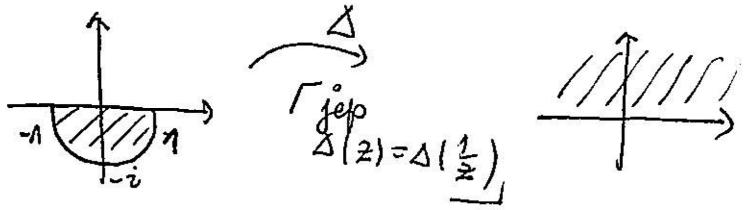
полуосе елипсе су $a=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$ и $b=\frac{1}{2}\left(r-\frac{1}{r}\right)$





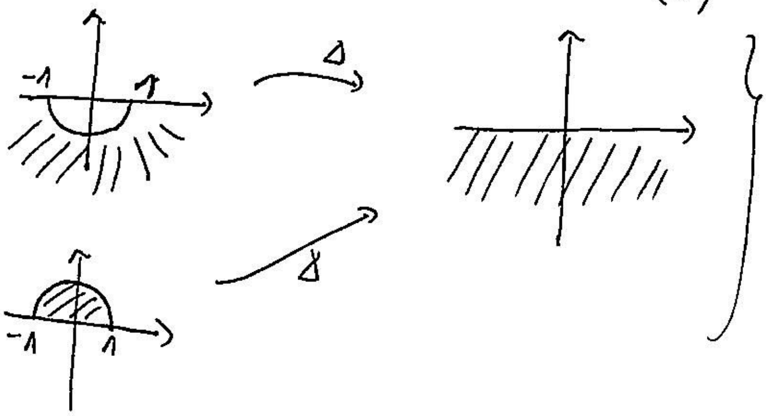
Полуелипсе са десне стране покрију $\mathbb{H}$

тј:



јер $\Delta(z)=\Delta\left(\frac{1}{z}\right)$

↑ ово је оно што се добије кад се  преслика са $\frac{1}{z}=\overline{\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$

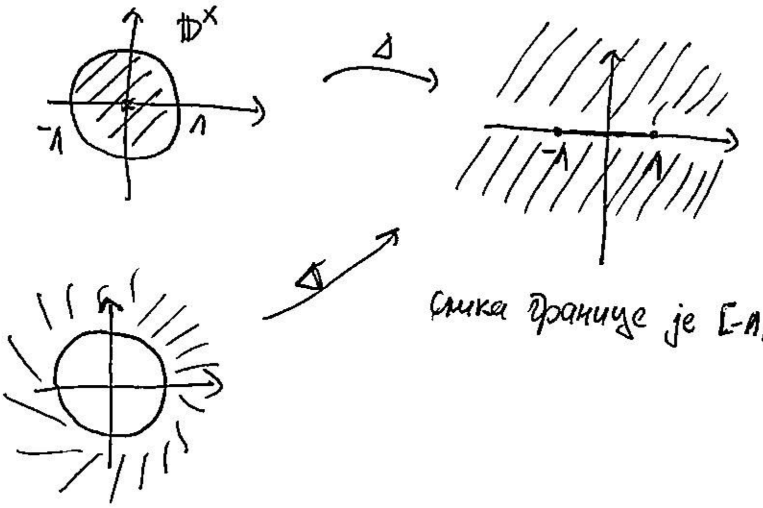


посматрано за $r<1$

$|z|=r$ се слика на елипсу са полуосама

$a=\frac{1}{2}\left(r+\frac{1}{r}\right)$

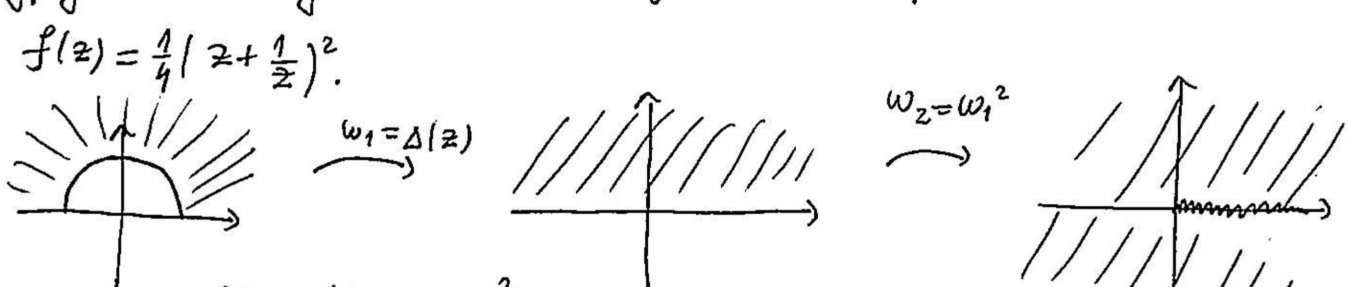
$b=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}-r\right)$



$\mathbb{C}\setminus[-1,1]$

слика границе је $[-1,1]$

① Одредити слику области $\Omega=\{z\in\mathbb{C}: |z|>1, \operatorname{Im} z>0\}$ при пресликавању $f(z)=\frac{1}{4}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2$.



$f(z)=\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)^2=\Delta^2(z)$

$\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$

$$\boxed{f(\Omega)=\mathbb{C}\setminus[0,\infty)}$$

② Одредити $f(\mathbb{D}^\times)$ ако је $f(z) = z - \frac{1}{z}$. $(\mathbb{D}^\times = \mathbb{D}\setminus\{0\})$

(Треба да изразимо f преко Δ!)

$$f(z) = a\cdot\Delta(bz) = a\cdot\left(bz + \frac{1}{bz}\right)\frac{1}{2} = \frac{ab}{2}z + \frac{a}{2b}\frac{1}{z} = z - \frac{1}{z}$$

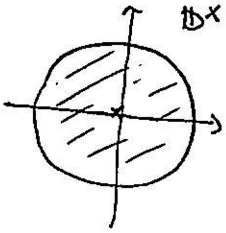
$\Rightarrow \quad \frac{ab}{2} = 1, \ \frac{a}{2b} = -1$

$ab = 2, \ a = -2b \Rightarrow -2b^2 = 2 \Rightarrow b^2 = -1 \Rightarrow b = i$

$a = -2i$

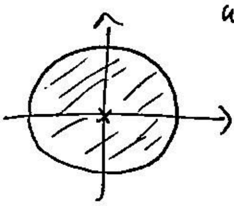
$$f(z) = -2i\cdot\Delta(iz) = -2i\cdot\left(\frac{1}{iz} + iz\right)\cdot\frac{1}{2}$$

$\mathbb{D}^\times$

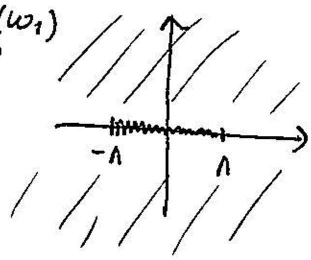


$w_1 = i\cdot z = e^{i\frac{\pi}{2}}z$

ротација за $\frac{\pi}{2}$

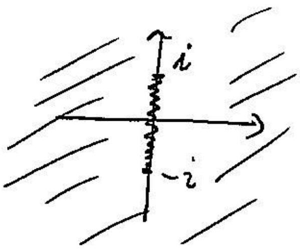


$w_2 = \Delta(w_1)$



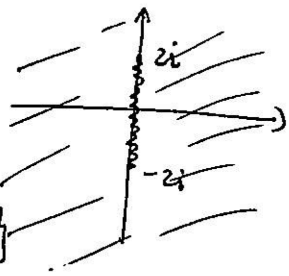
$\mathbb{C}\setminus[-1,1]$

$w_3 = -i\cdot w_2 = e^{-i\frac{\pi}{2}}w_2$



$\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z = 0, \mathrm{Im}\, z\in[-1,1]\}$

$w_4 = 2w_3$



$f(\mathbb{D}^\times) = \mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z = 0, \mathrm{Im}\, z\in[-2,2$

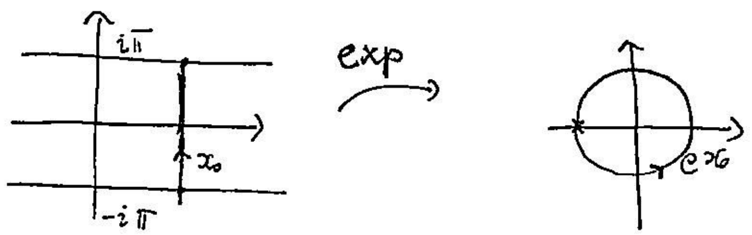
* Експоненцијална функција $\qquad w = \exp$

$w = e^z, \ z\in\mathbb{C} \qquad w(z)=\exp(z)=e^z$

$e^{z_1}=e^{z_2} \Rightarrow z_1 = z_2 + 2k\pi\cdot i, \ k\in\mathbb{Z}$

ф-ја e^z је периодична са периодом $2\pi i$

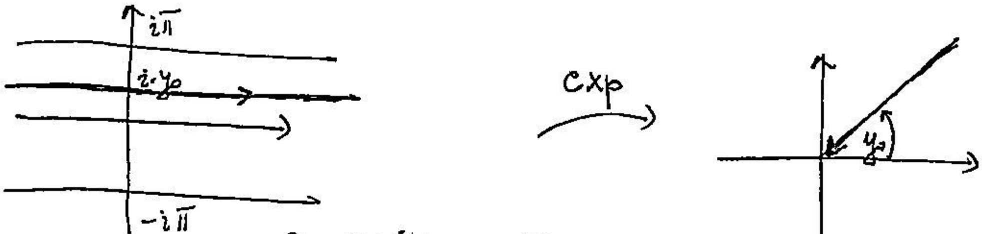
$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$



слика дужи $\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Re}\, z = x_0, \ \mathrm{Im}\, z\in(-\pi,\pi)\}$ је кружница полупречника e^{x_0} без једне тачке (центар је 0)

$z = x_0 + iy, \ y\in(-\pi,\pi)$

$\exp(z) = e^{x_0}\cdot e^{iy}, \ y\in(-\pi,\pi)$



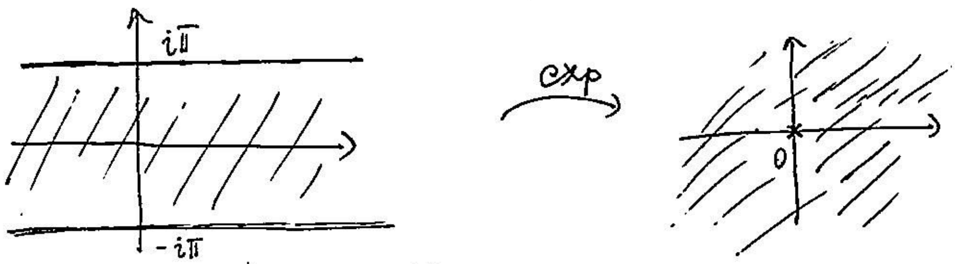
$z = x+iy_0, \ x\in\mathbb{R}$

$\exp(z)=e^x\cdot e^{iy_0}$

$e^x\in(0,\infty)$

слика праве $\{z\in\mathbb{C}: \mathrm{Im}\, z = y_0\}$ је полуправа без тачке 0

$\{w\in\mathbb{C}: \arg w = y_0, \ w\neq 0\}$



$\mathrm{Im}\, z\in(-\pi,\pi]$

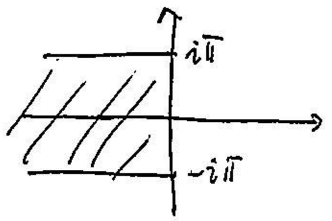
$\mathbb{C}\setminus\{0\}=\mathbb{C}^\times$

x_0 иде од 0 до ∞

$e^0=1$

$\mathrm{Im}\, z\in(-\pi,\pi]$

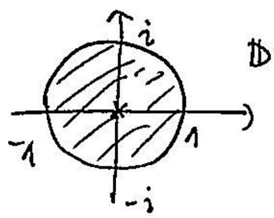
↑ укључена једна граница



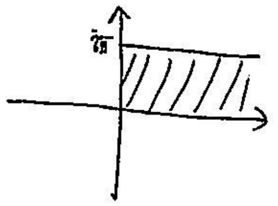
$\operatorname{Im} z \in (-\pi, \pi]$

x_0 иде од $-\infty$ до 0

exp



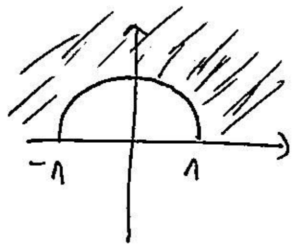
$\mathbb{D}^{\times} = \mathbb{D} \setminus \{0\}$

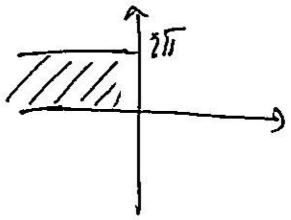


exp

$0 < y < \pi$

$e^{x} > e^{0} = 1$

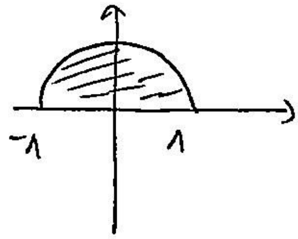


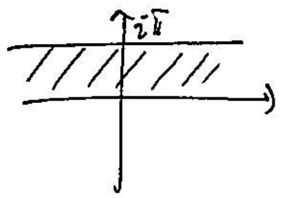


exp

$0 < y < \pi$

$e^{x} < e^{0} = 1$

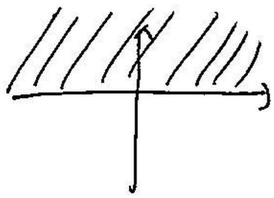


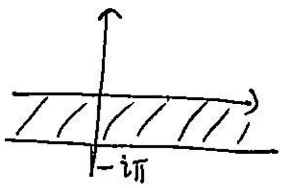


exp

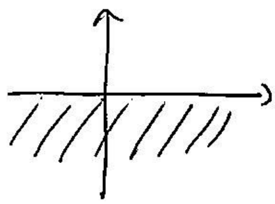
$y \in (0, \pi)$

$e^{x} \in (0, \infty)$



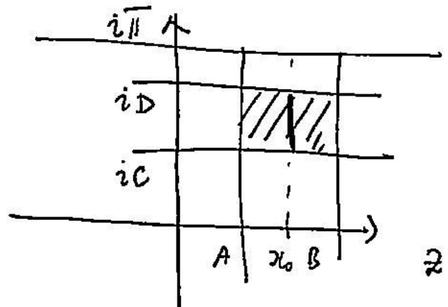


exp

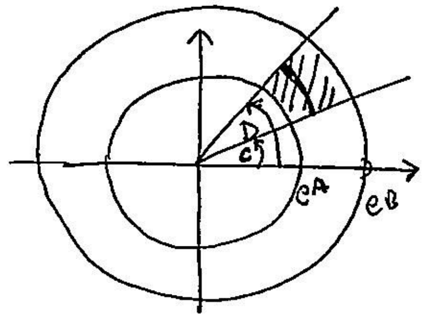


$e^{x} \in (0, \infty)$

$y \in (-\pi, 0)$



exp



$z = x_0 + iy$

$y \in [C, D]$

фиксирано за моменат

(x_0 иде од A до B)

$\exp(z) = e^{x_0} \cdot e^{iy}$

$e^{x_0} \in (e^{A}, e^{B})$, $y \in (C, D)$