Билинеарна пресликавања

(други назив: Мебијусове трансформације)

$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ Риманова сфера (или проширена комплексна раван)

$a,b,c,d\in\mathbb{C}$ такви да је $ad-bc\neq 0$

$f:\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$

$f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ се назива билинеарно пресликавање

$f(\infty)=\begin{cases}\frac{a}{c}, & c\neq 0\\ \infty, & c=0\end{cases}$ $\qquad f\left(\frac{-d}{c}\right)=\infty$ за $c\neq 0$

f је бијекција (проверите!)

$\underline{c\neq 0}$: $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{\frac{a}{c}(cz+d)-\frac{ad}{c}+b}{cz+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{\frac{bc-ad}{c}}{cz+d}$

$=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c}\cdot\dfrac{1}{c(z+\frac{d}{c})}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c^2}\cdot\left(\dfrac{1}{\overline{\overline{z+\frac{d}{c}}}}\right)$

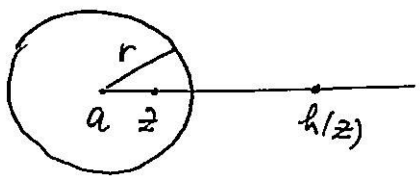
композиција је транслације, ротације, хомотетије, симетрије и инверзије

$\underline{c=0}$: $f(z)=\dfrac{a}{d}z+\dfrac{b}{d}$ линеарно пресликавање

1) $w_1(z)=z+\frac{d}{c}$ транслација
2) $w_2(w_1)=\frac{1}{\overline{w_1}}$ инверзија у односу на јединичну кружницу са центром у 0
3) $w_3(w_2)=\overline{w_2}$ симетрија у односу на x осу (рефлексија)
4) $w_4(w_3)=\frac{bc-ad}{c^2}\cdot w_3$ композиција ротације и хомотетије $\left(\frac{bc-ad}{c^2}=A=|A|e^{i\arg A}\right)$
5) $w_5(w_4)=\frac{a}{c}+w_4$ транслација

$$\boxed{f=w_5\circ w_4\circ w_3\circ w_2\circ w_1}$$

* Инверзија у односу на $K=\partial D(a,r)$



h инверзија

$|z-a|\cdot|h(z)-a|=r^2$

a, z и $h(z)$ су на истој полуправој $\Rightarrow \arg(z-a)=\arg(h(z)-a)$

$\Rightarrow h(z)-a=|h(z)-a|\,e^{i\arg(h(z)-a)}=\dfrac{r^2}{|z-a|}\cdot e^{i\arg(z-a)}=\dfrac{r^2}{|z-a|}\,\dfrac{z-a}{|z-a|}$

$=\dfrac{r^2\cdot(z-a)}{|z-a|^2}=\dfrac{r^2(z-a)}{(z-a)\overline{(z-a)}}=\dfrac{r^2}{\overline{z-a}}$

$\Rightarrow \boxed{h(z)=a+\dfrac{r^2}{\overline{z-a}}}$ формула инверзије

Специјално: $a=0, r=1$

$h(z)=\dfrac{1}{\overline{z}}$

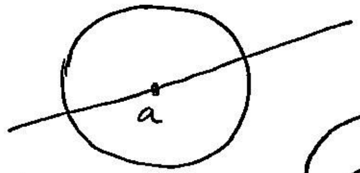
$D(a,r)=\{z\in\mathbb{C} : |z-a|<r\}$

формула инверзије: $h(z)=\dfrac{r^2}{\bar z-\bar a}+a$ $\qquad h: \infty \to a,\ a\to\infty$

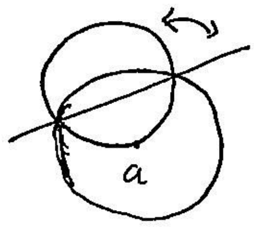
Инверзију називамо и симетрија у односу на кружницу

Особине инверзије:

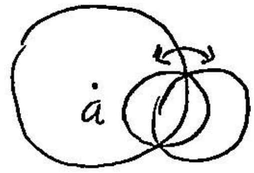
1. Тачке из унутрашњости $D(a,r)$ се сликају у тачке из спољашњости и обратно.
2. Тачке са руба $\partial D(a,r)$ су фиксне
3. Права која садржи a се слика на себе



4. Права која не садржи a се слика на кружницу која садржи a и пресечне тачке праве и кружнице.



5. Кружница која садржи a се слика у праву која не садржи a
6. Кружница која не садржи a се слика у кружницу која не садржи a.



Сматрамо да права садржи ∞.

Такву праву сврставамо заједно са кружницом у појам уопштена кружница.

! Инверзија уопштене кружнице слика на уопштене кружнице.

Аналитички доказ:

Први час: једначина праве $\bar A z + A\bar z + c = 0$, $A\in\mathbb{C}$, $c\in\mathbb{R}$

једначина кружнице $|z|^2+\bar A z + A\bar z + c=0$, $A\in\mathbb{C}$, $c\in\mathbb{R}$

Једначина уопштене кружнице је онда:

$$B|z|^2+\bar A z+A\bar z+c=0,\ A\in\mathbb{C},\ c\in\mathbb{R}$$

($B\in\mathbb{R}$ нпр. али можемо ограничити и да буде 0 или 1).

$B|z|^2+\bar{A}z+A\bar{z}+c=0$ се слика инверзијом $h(z)=\frac{1}{\bar{z}}=\omega$ на:

$B\cdot\left|\frac{1}{\omega}\right|^2+\bar{A}\cdot\frac{1}{\bar{\omega}}+A\cdot\frac{1}{\omega}+c=0 \quad /\cdot|\omega|^2$

$B+\bar{A}\cdot\omega+A\bar{\omega}+C|\omega|^2=0$ опет уопштена кружница

(*)

Једначина $B|z|^2+\bar{A}z+A\bar{z}+c=0$:

- за $B\neq 0$ представља кружницу и за $c\neq 0$ она не садржи 0, а за $c=0$ она садржи 0
- за $B=0$ представља праву која за $c\neq 0$ не садржи 0, а за $c=0$ садржи 0

Сада је јасно да из (*) добијамо да важи 3. 4. 5. и 6. (за случај $a=0$) специјално

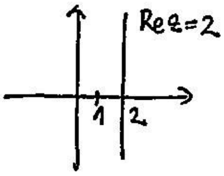
① Функцијом $f(z)=\frac{1-z}{1+z}$ пресликати

а) праву $\{z\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z = 2\}$

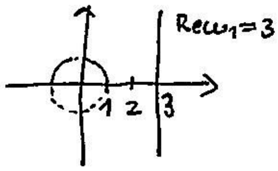
б) кружницу $\{z\in\mathbb{C} : |z-1| = 2\}$

$$f(z)=\frac{1-z}{1+z}=\frac{-(1+z)+2}{1+z}=-1+\frac{2}{1+z}=-1+2\cdot\overline{\left(\frac{1}{\overline{1+z}}\right)}$$

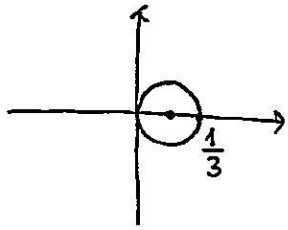
а)



$\xrightarrow{w_1}$ $w_1(z)=z+1$



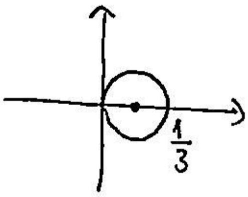
$\longrightarrow$ $w_2=\frac{1}{\overline{w_1}}$ инверзија



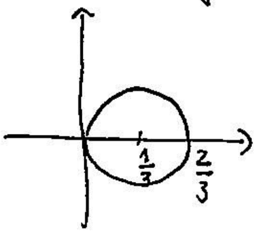
$|w_2-\frac{1}{6}|=\frac{1}{6}$

јер $w_2(3)=\frac{1}{3}$ па је центар у $\frac{1}{6}$

$\xrightarrow{w_3}$ $w_3(w_2)=\overline{w_2}$

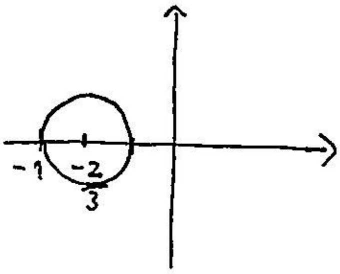


$\xrightarrow{w_4}$ $w_4(w_3)=2w_3$



$|w_4-\frac{1}{3}|=\frac{1}{3}$

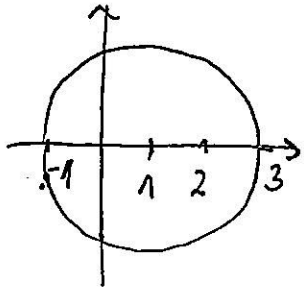
$\xrightarrow{w_5}$ $w_5(w_4)=w_4-1$



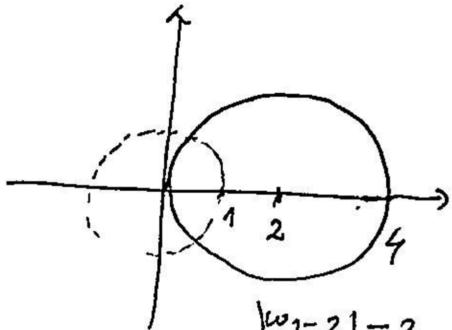
$|w_5+\frac{2}{3}|=\frac{1}{3}$

$\boxed{\text{Дакле, слика је } |w+\frac{2}{3}|=\frac{1}{3}.}$

б)

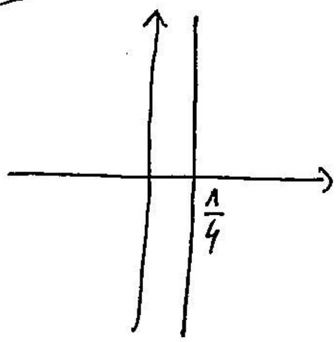


$\xrightarrow{w_1}$ $w_1(z)=z+1$



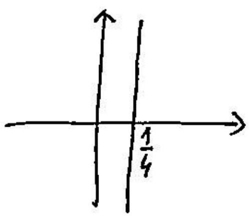
$|w_1-2|=2$

$\xrightarrow{w_2}$ $w_2(w_1)=\frac{1}{\overline{w_1}}$



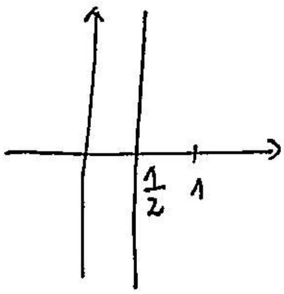
$4\mapsto\frac{1}{4}$ $\quad \mathrm{Re}\, w_2=\frac{1}{4}$ права

$\xrightarrow{w_3}$ $w_3=\overline{w_2}$



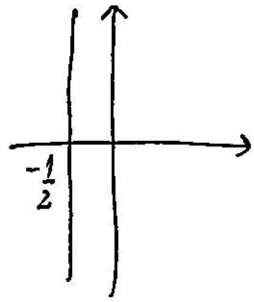
(ништа се не промени) конјуговањем

$\xrightarrow{w_4 = 2w_3}$



$\mathrm{Re}\,w_4 = \frac{1}{2}$ $\xrightarrow{w_5}$

$w_5(w_4) = w_4 - 1$



$\mathrm{Re}\,w_5 = -\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{Дакле, слика је права } \mathrm{Re}\,\omega = -\frac{1}{2}.}$

Теорема 1: Нека су $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ различите тачке и $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \overline{\mathbb{C}}$ такође различите тачке у Римановој сфери $\overline{\mathbb{C}}$. Тада постоји јединствено билинеарно пресликавање $\omega = \phi(z)$ тд. је $\phi(z_i) = \omega_i$, $i = 1,2,3$ и важи:

$$\frac{\omega - \omega_2}{\omega - \omega_3} : \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_3} = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}.$$

(израз у коме се појављује ∞ мењамо са 1)

② Одредити билинеарно пресликавање ϕ тако да важи:

$\phi(i) = 0$, $\phi(-i) = \infty$ и $\phi(0) = -1$. Затим пресликавањем ϕ пресликати област $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\,z > 0\}$.

$\omega = \phi(z)$

$$\left.\begin{array}{ll} z_1 = i & \omega_1 = 0 \\ z_2 = -i & \omega_2 = \infty \\ z_3 = 0 & \omega_3 = -1 \end{array}\right\} \overset{T1}{\Rightarrow} \quad \frac{\omega - \infty}{\omega - (-1)} : \frac{0 - \infty}{0 - (-1)} = \frac{z - (-i)}{z - 0} : \frac{i - (-i)}{i - 0}$$

$$\underbrace{\cancel{\frac{\omega - \infty}{0 - \infty}}}_{1} : \frac{\omega - (-1)}{0 - (-1)} = \frac{z + i}{z} : \frac{2i}{i}$$

$$1 : \frac{\omega + 1}{1} = \frac{z + i}{z} : 2$$

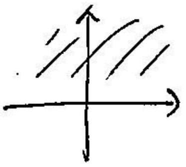
$$(\omega + 1)\,\frac{z + i}{z} = 2$$

$$\omega + 1 = \frac{2z}{z + i}$$

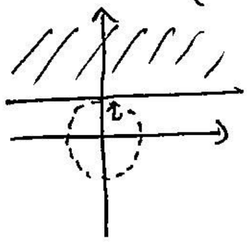
$$\omega = \frac{2z}{z + i} - 1 = \frac{2z - z - i}{z + i} = \frac{z - i}{z + i}$$

$$\boxed{\phi(z) = \frac{z - i}{z + i}}$$

$$\phi(z)=\frac{z-i}{z+i}=\frac{z+i-2i}{z+i}=1-2i\cdot\left(\overline{\frac{1}{z+i}}\right)$$

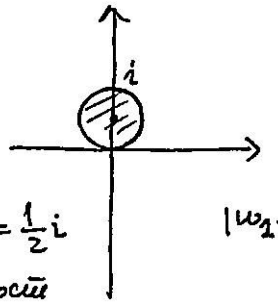


$\xrightarrow{w_1=z+i}$



$\operatorname{Im} w_1>1$

$\xrightarrow{w_2(w_1)=\frac{1}{w_1}}$

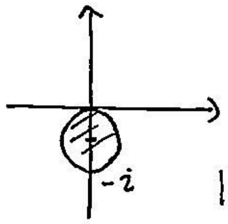


$2i\mapsto\frac{1}{-2i}=\frac{1}{2}i$

$\Rightarrow$ унутрашњост кружнице је слика полуравни

$|w_2-\frac{i}{2}|<\frac{1}{2}$

$\xrightarrow{w_3(w_2)=\overline{w_2}}$

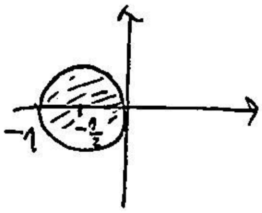


$|w_3+\frac{i}{2}|<\frac{1}{2}$

$w_4(w_3)=-i\,w_3$

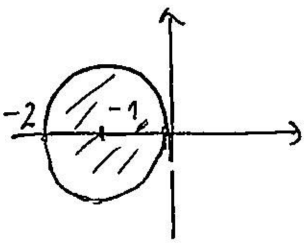
$w_4(w_3)=e^{-i\frac{\pi}{2}}w_3$

ротација за $-\frac{\pi}{2}$



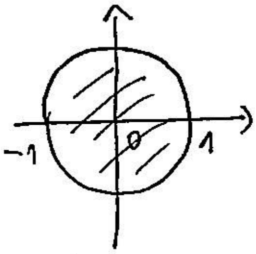
$|w_4+\frac{1}{2}|<\frac{1}{2}$

$\xrightarrow{w_5(w_4)=2w_4}$



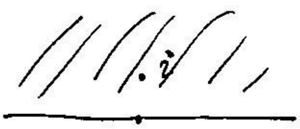
$|w_5+1|<1$

$\xrightarrow{w_6(w_5)=w_5+1}$



$|w_6|<1$

Слика је јединични диск $|w|<1$.



$\longrightarrow$

$\phi(z)=\frac{z-i}{z+i}$

$i\mapsto 0$

$-i\mapsto\infty$

$0\mapsto -1$

Теорема 2: Нека је K права или кружница у $\mathbb{C}$ и $w=\phi(z)$ билинеарно пресликавање. Тада су тачке z и z^* симетричне у односу на K акко су тачке $\phi(z)$ и $\phi(z^*)$ симетричне у односу на $\phi(K)$.

(симетрија у односу на кружницу је инверзија)