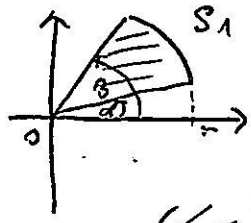
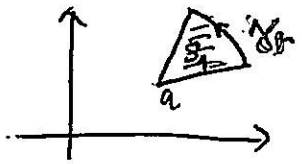
Наставак: рачунање реалних интеграла применом Кошијеве т-е о остацима

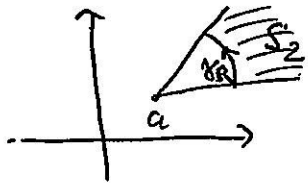
Ознаке: $a \in \mathbb{C}$, $\alpha < \beta$, $\beta - \alpha \leq 2\pi$, $r > 0$, $R > 0$

$S_1 = S_r(\alpha, \beta) = \{a + \rho e^{it} : 0 < \rho < r,\ \alpha \leq t \leq \beta\}$

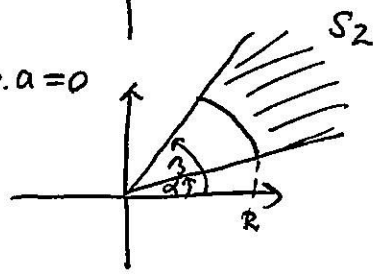
$S_2 = S_R(\alpha, \beta) = \{a + \rho e^{it} : \rho > R,\ \alpha \leq t \leq \beta\}$







нпр. $a = 0$

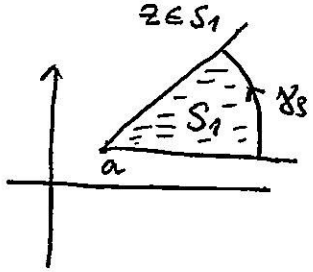


γ_ρ кружни лук, $\gamma_\rho(t) = a + \rho e^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$
(позитивно оријентисана γ_R) и γ_r

Жорданова лема 1:

Нека је $f : S_1 \to \mathbb{C}$ непрекидна функција и $A = \lim\limits_{\substack{z \to a \\ z \in S_1}} (z-a) f(z)$.

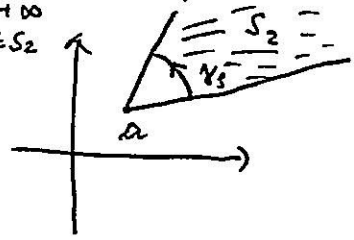
Тада је $\lim\limits_{\rho \to 0^+} \int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = i \cdot A \cdot (\beta - \alpha)$.



Жорданова лема 2:

Нека је $f : S_2 \to \mathbb{C}$ непрекидна функција и $A = \lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ z \in S_2}} (z-a) f(z)$.

Тада је $\lim\limits_{\rho \to +\infty} \int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz = i \cdot A (\beta - \alpha)$.

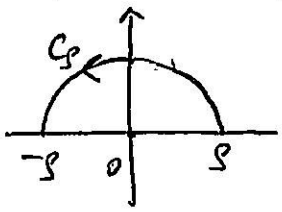


Жорданова неједнакост:

Нека је $R \in \mathbb{R}$, $R > 0$. Тада је: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R \sin t}\,dt < \frac{\pi}{2R}$ и $\int_0^{\pi} e^{-R \sin t}\,dt < \frac{\pi}{R}$.

Жорданова лема 3: Нека је фја f непрекидна на $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0, |z| > R\}$, $R > 0$ и $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ z \in \overline{H}}} f(z) = 0$. Ако је $C_\rho = \{\rho e^{it} : t \in [0, \pi]\}$, $\rho > R$ (C_ρ је полукружница са центр. 0 и полупречником ρ)

тада је $\lim\limits_{\rho \to +\infty} \int_{C_\rho} f(z) e^{i\lambda z}\,dz = 0$ за све $\lambda > 0$.



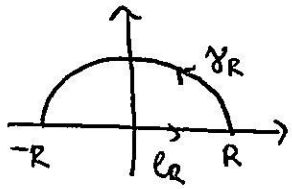
ТИП 3: Фуријеови интеграли

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{i\alpha x}\, dx, \quad \alpha > 0$$

f холоморфна на $\overline{H} \setminus A$, $\overline{H} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, A коначан скуп тачака у H (што значи да нема сингуларитета на реалној оси)

Претпоставља се још да је $\lim\limits_{\substack{|z| \to \infty \\ z \in \overline{H}}} |f(z)| = 0$.

Интеграмо дуж контуре на слици:



$\gamma_R : z = Re^{it}, \; t \in [0, \pi]$

$l_R : z = t, \; t \in [-R, R]$

$\Gamma_R = \gamma_R + l_R$

$$\int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\alpha z}\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z) e^{i\alpha z}, z_k)$$

$A = \{z_1, \dots, z_n\}$ скуп изолованих сингуларитета

$A \subseteq H$

R узимамо довољно велико тд. је

$z_1, \dots, z_n \in \operatorname{Int} \Gamma_R$

$$\int_{\Gamma_R} f(z) e^{i\alpha z}\, dz = \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\alpha z}\, dz + \int_{l_R} f(z) e^{i\alpha z}\, dz$$

$$= \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\alpha z}\, dz + \int_{-R}^{R} f(t) e^{i\alpha t}\, dt$$

На основу Жорданове леме 3 је $\lim\limits_{R \to \infty} \int_{\gamma_R} f(z) e^{i\alpha z}\, dz = 0$.

$$\Rightarrow \quad \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(t) e^{i\alpha t}\, dt = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z) e^{i\alpha z}, z_k)$$

тј. $\boxed{I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z) e^{i\alpha z}, z_k)}$

③ Израчунати интеграл $I = \int_0^\infty \frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2} dx$.

$$\frac{x^3 \sin x}{(x^2+1)^2} = \operatorname{Im}\left(\frac{x^3 \cdot (\cos x + i \sin x)}{(x^2+1)^2}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{x^3 e^{ix}}{(x^2+1)^2}\right)$$

$$f(z) = \frac{z^3}{(z^2+1)^2}, \quad \alpha = 1$$

$\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in\overline{H}}} |f(z)| = 0$ полови фје f су $\pm i$ и реда су 2 (покажите)

f је холоморфна на $\overline{H} \setminus \{i\}$ (i је у горњој полуравни, $-i$ у доњој)

$$\underset{\text{тип 3}}{\Longrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix} dx = 2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f(z) e^{iz}, i)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2+1)^2} e^{ix} dx = 2\pi i \cdot \underbrace{\operatorname{Res}(f(z) e^{iz}, i)}_{A}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2+1)^2} \cos x \, dx + i \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3}{(x^2+1)^2} \sin x \, dx = 2\pi i \cdot A$$

$A = \operatorname{Res}\left(\frac{z^3}{(z^2+1)^2} \cdot e^{iz}, i\right)$ ред пола је 2

$$A = \lim_{z\to i} \frac{1}{(2-1)!} \left(\frac{z^3}{(z+i)^2 \cancel{(z-i)^2}} \cancel{(z-i)^2} \cdot e^{iz}\right)'$$

$$A = \lim_{z\to i} \left(\frac{z^3}{(z+i)^2} e^{iz}\right)' = \lim_{z\to i} \frac{(3z^2 e^{iz} + z^3 i e^{iz}) \cdot (z+i)^2 - z^3 e^{iz} (z+i) \cdot 2}{(z+i)^4}$$

$$= \lim_{z\to i} \frac{(z+i) e^{iz} \cdot z^2 (3+zi) - 2z^3 e^{iz}}{(z+i)^3} = \frac{2\cancel{i} e^{-1} \cdot \cancel{i^2} \cdot \overbrace{(3+i^2)}^{2} - 2\cancel{i^3} \cdot e^{-1}}{(2i)^3}$$

$$= \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{8} \cdot 2 = \frac{1}{4e}$$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\cos x\,dx}_{=0} + i\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{x^3}{(x^2+1)^2}}_{\text{парна ф-ја}}\sin x\,dx = 2\pi i\cdot\frac{1}{4e} = \frac{\pi i}{2e}$$

$=0$ јер је подинтегрална ф-ја непарна (а и реални део израза са десне стране је 0)

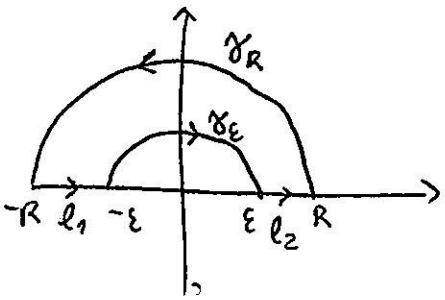
$$\Rightarrow \quad 2\cdot\int_0^{+\infty} \frac{x^3}{(x^2+1)^2}\sin x\,dx = \frac{\pi}{2e}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\int_0^{+\infty} \frac{x^3\sin x}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{\pi}{4e}}$$

$$\boxed{I = \frac{\pi}{4e}}$$

<u>Тип 4</u>: $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx$ све исто као у 3, само f има пол и у 0

$\Rightarrow$ тада се интеграли по следећој контури



$\gamma_R: z = Re^{it},\ t\in[0,\pi]$

$\ell_1: z = t,\ t\in[-R,-\varepsilon]$

$\gamma_\varepsilon: z = \varepsilon e^{it},\ t\in[0,\pi]$ од π ка 0 због оријентације!

$\ell_2: z = t,\ t\in[\varepsilon,R]$

$$\Gamma_{R,\varepsilon} = \gamma_R + \ell_1 + \gamma_\varepsilon + \ell_2$$

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} f(z)e^{i\alpha z}dz = 2\pi i\cdot\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, z_k)$$

$z_1,\dots,z_n$ сингуларитети у горњој полуравни $\{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$ (за ε довољно мало и R дов. велико тј. у $\operatorname{Int}\Gamma_{R,\varepsilon}$)

! Када се израчуна, узимамо $\lim_{R\to+\infty}$ и $\lim_{\varepsilon\to 0^+}$ и користимо Жорданове лене.

④ Израчунати интеграл $I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin ax}{x(x^2+1)^2}dx$, $a>0$

$$I=\operatorname{Im}\int_0^{+\infty}\frac{e^{iax}}{x(x^2+1)^2}dx$$

$f(z)=\frac{1}{z(z^2+1)^2}$ $\quad z=0$ је пол првог реда

$z=i$ и $z=-i$ су полови другог реда } пожаннит

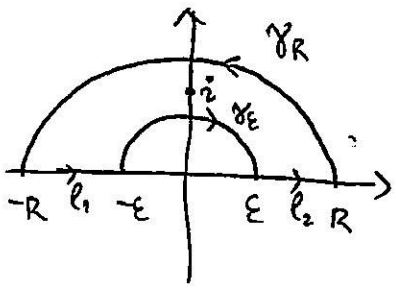
$$\operatorname{Res}(f(z)e^{iaz},i)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to i}\left(\cancel{(z-i)^2}\cdot\frac{e^{iaz}}{z\cancel{(z-i)^2}(z+i)^2}\right)'$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{iae^{iaz}\cdot z(z+i)^2-e^{iaz}((z+i)^2+z\cdot 2(z+i))}{(z(z+i)^2)^2}$$

$$=\lim_{z\to i}\frac{iae^{iaz}z(z+i)-e^{iaz}(z+i+2z)}{z^2(z+i)^3}$$

$$=\frac{iae^{ia\cdot i}\cdot i(2i)-e^{ia i}(3i+i)}{i^2(2i)^3}=\frac{ae^{-a}\cdot 2(-i)-e^{-a}\cdot 4i}{8i}=\frac{-ae^{-a}-2e}{4}$$

$$=\frac{-(a+2)e^{-a}}{4}$$



i је једини пол у горњој полуравни

i је унутар контуре за $\varepsilon<\frac{1}{2}$ нпр. и $R>1$

$\gamma_R:\ z=Re^{it},\ t\in[0,\pi]$

$\ell_1:\ z=t,\ t\in[-R,-\varepsilon]$

$\gamma_\varepsilon:\ z=\varepsilon e^{it},\ t\in[0,\pi]\to$ (t иде од π до 0 због оријентације)

$\ell_2:\ z=t,\ t\in[\varepsilon,R]$

$$\Gamma_{R,\varepsilon}=\gamma_R+\ell_1+\gamma_\varepsilon+\ell_2$$

$$\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}}f(z)e^{iaz}dz=2\pi i\cdot\frac{-(a+2)e^{-a}}{4}=\frac{-\pi i(a+2)e^{-a}}{2}=S$$

$R>1,\ \varepsilon<\frac{1}{2}$

$$S(R,\varepsilon)=\int_{\gamma_R}f(z)e^{iaz}dz+\int_{\ell_1}f(z)e^{iaz}dz+\int_{\gamma_\varepsilon^-}f(z)e^{iaz}dz+\int_{\ell_2}f(z)e^{iaz}dz=S$$