Основни појмови теорије вероватноће

деф:

Уређен пар $(\Omega, \mathcal{A})$, где је Ω дати скуп и $\mathcal{A}$ фамилија подскупова од Ω, представља мерљив простор ако важи:

1° $\Omega \in \mathcal{A}$

2° $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

3° $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ из $\mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

- Елементи фамилије $\mathcal{A}$ се називају догађаји.
- Догађај A^c је супротан догађај за догађај $A \in \mathcal{A}$.
- Догађај Ω је сигуран догађај.
- Догађај $\emptyset$ је немогућ догађај.

* Мерљив простор $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ где је $\mathcal{B}$ најмања фамилија подскупова од $\mathbb{R}$ која испуњава услове 1°, 2° и 3° и која садржи све скупове облика $(a, b]$, $a<b$, зове се Борелов мерљив простор.

деф: Уређена тројка $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ где је $(\Omega, \mathcal{A})$ мерљив простор и $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ дата функција, представља простор вероватноћа, уколико важи:

(i) $P(\Omega) = 1$

(ii) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{A}$

(iii) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ дисјунктних догађаја из $\mathcal{A}$ (сваки са сваким)

$$\Rightarrow P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

[A и B дисјунктни ако је $A \cap B = \emptyset$]

Функција $P: \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ се назива вероватноћа.

Вредност $P(A)$ је вероватноћа догађаја $A \in \mathcal{A}$.

① Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа.

Доказати да важи:

1) $P(\emptyset)=0$

2) $A_1,\dots,A_n$ дисјунктни догађаји $\Rightarrow P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j)=\sum_{j=1}^{n} P(A_j)$

3) $P(A^c)=1-P(A)$

4) $A\subset B \Rightarrow P(A)\leq P(B)$

5) $A_1,\dots,A_n$ произвољни догађаји $\Rightarrow P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j)\leq \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$

6) $P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)$.

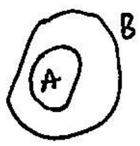
дивергира ако није $P(\emptyset)=0$

1) $P(\emptyset)=P(\emptyset\cup\emptyset\cup\dots)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}\emptyset)\overset{(iii)}{=}\sum_{n=1}^{\infty}P(\emptyset) \Rightarrow P(\emptyset)=0$

2)

$$P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j)=P(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\cup\emptyset\cup\emptyset\cup\dots)\overset{(iii)}{=}\sum_{j=1}^{n}P(A_j)+P(\emptyset)+P(\emptyset)+\dots\overset{1)}{=}\sum_{j=1}^{n}P(A_j)$$

3) $P(\Omega)\overset{(i)}{=}1=P(A\cup A^c)\overset{2)}{=}P(A)+P(A^c) \Rightarrow P(A^c)=1-P(A)$.

4) 

$P(B)=P(A\cup B\setminus A)\overset{2)}{=}P(A)+\underbrace{P(B\setminus A)}_{\geq 0\ (ii)}\geq P(A)$

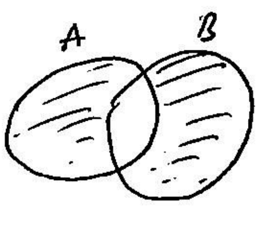
5)

$$P(\bigcup_{j=1} A_j)=P(A_1\cup A_2\setminus A_1\cup A_3\setminus(A_1\cup A_2)\cup\dots\cup A_n\setminus(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_{n-1}))$$

$$\overset{2)}{=}P(A_1)+P(A_2\setminus A_1)+P(A_3\setminus(A_1\cup A_2))+\dots+P(A_n\setminus(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_{n-1}))$$

$$\underset{4)}{\leq}P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\dots+P(A_n)$$

јер $A_2\setminus A_1\subseteq A_2,\ A_3\setminus(A_1\cup A_2)\subseteq A_3,\dots,A_n\setminus(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_{n-1})\subseteq A_n$

6) 

$$P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A\cup B\setminus A)+P(A\cap B)$$

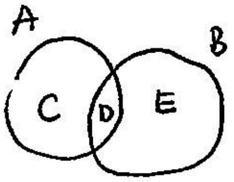
$$\underset{2)}{=}P(A)+\underbrace{P(B\setminus A)+P(A\cap B)}_{P(B)}\overset{2)}{=}P(A)+P(B)$$

јер је $B=(B\setminus A)\cup(A\cap B)$

и $(B\setminus A)\cap(A\cap B)=\emptyset$

② Нека су A и B произвољни догађаји и P вероватноћа. Доказати да је:

$$|P(A\cap B) - P(A)\cdot P(B)| \le \frac{1}{4}.$$



$C = A\setminus B$ $\quad P(C) = c$

$D = A\cap B$ $\quad P(D) = d$

$E = B\setminus A$ $\quad P(E) = e$

$\Big\}$ уведено ознаке

$P(A) = c+d$

$P(B) = d+e$

тражена неједнакост постаје:

$$|d-(c+d)(d+e)| \le \frac{1}{4}$$ где су c, d и e такви да важи $c+d+e = P(A\cup B) \le 1$, $c, d, e \ge 0$

$$|d-cd-d^2-ce-de| \overset{?}{\le} \frac{1}{4}$$

$$|d(1-d)-cd-ce-de| \overset{?}{\le} \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} d(1-d)-cd-ce-de \le d(1-d) \le \left(\dfrac{d+(1-d)}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4} & \left(\text{јер } \sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2} \text{ па } ab \le \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\right) \\ cd+ce+de-d(1-d) = ce-d\underbrace{(1-d-c-e)}_{\ge 0} \le c\cdot e \le \left(\dfrac{c+e}{2}\right)^2 \le \dfrac{1}{4} & \text{јер } c+e \le 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $|d(1-d)-cd-ce-de| \le \frac{1}{4}$, а што се и тражило.

* Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа. Функција $X: \Omega \to \mathbb{R}$ је случајна величина ако важи $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ за све $B \in \mathcal{B}$. ($\mathcal{B}$ Борелов н. простор)

Ако је $X: \Omega \to \{x_1, x_2, \ldots\}$, где је $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ низ различитих тачака из $\mathbb{R}$, онда је X дискретна случајна величина.

запис:

$$X: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots \end{pmatrix} \quad \text{где је } p_n = P\{X = x_n\}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\{X = x_n\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_n\} = X^{-1}(\{x_n\}) \subseteq \Omega$$

$\{X = x_n\} \in \mathcal{A}$, па је добро деф. $P\{X = x_n\}$

Важи $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$, јер:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = \sum_{n=1}^{\infty} P\{X = x_n\} = \sum_{n=1}^{\infty} P(X^{-1}\{x_n\}) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}\{x_n\}\right) = P(\Omega) = 1$$

Функција $F_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дефинисана са $F_X(x) = P\{X \le x\}$, зове се функција расподеле случајне величине X. Фја $f_X: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таква да важи

$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$ се назива густина расподеле случајне величине X.

Својства фје расподеле:

(1) F_X је растућа фја

(2) $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$

(3) $\lim_{t \to x^+} F_X(t) = F_X(x)$ непрекидност с десна

Својства густине расподеле:

(1) $f_X \geq 0$

(2) $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt$$

Додатно важи: $F_X'(x) = f_X(x)$ важи за све x у којима је f_X непрекидна

* **ОЧЕКИВАЊЕ**

Очекивање случајне величине X : $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_X(x)\,dx$

Очекивање случајне величине $h(X)$, где је $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ дата функција:

$$E(h(X))=\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) f_X(x)\,dx$$

Очекивање дискретне случајне величине $X:\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots \end{pmatrix}$

је $E(X)=\sum_{n=1}^{\infty} p_n\cdot x_n$ $\quad\left(E(h(X))=\sum_{n=1}^{\infty} p_n h(x_n)\right)$

Важи: $E(aX+bY)=aE(X)+bE(Y)$ $\forall a,b\in\mathbb{R}$, X,Y случајне величине

* **ДИСПЕРЗИЈА**

$$D(X)=E\left((X-E(X))^2\right)$$

Важи: 1) $D(X)=E(X^2)-(E(X))^2$

2) $0\le D(X)\le E(X^2)$

3) $D(aX+b)=a^2D(X)$

$\left.\begin{array}{l} E(a)=a \\ D(a)=0 \end{array}\right\}$ $a\in\mathbb{R}$

1) $D(X)=E((X-E(X))^2)=E(X^2-2XE(X)+E(X)^2)$

$= E(X^2)-2E(X)E(X)+E(X)^2$

$=E(X^2)-E(X)^2$

2) $D(X)=E(\underbrace{(X-E(X))^2}_{\geq 0})\geq 0$ $\qquad D(X)\le E(X^2)$ из 1)

3) $D(aX+b)=E((aX+b)^2)-E(aX+b)^2$

$=E(a^2X^2+2abX+b^2)-(aE(X)+b)^2$

$=a^2E(X^2)+\cancel{2abE(X)}+\cancel{b^2}-a^2E(X)^2-\cancel{2abE(X)}-\cancel{b^2}$

$=a^2\cdot D(X)$