/

Подсетник: f холоморфна на $D^\times(z_0,r) = A(z_0,0,r)$ се развија у Лоранов развој на $D^\times(z_0,r)$

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \dots + a_{-2}(z-z_0)^{-2} + a_{-1}(z-z_0)^{-1} + a_0 + \dots$$

где је $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varrho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$, за све $n \in \mathbb{Z}$

при чему је γ_ϱ позитивно оријентисана кружница са центром 0 и полупречником $\varrho \in (0,r)$

дефинишемо: $\mathrm{Res}(f,z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varrho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_\varrho} f(z) dz$

↓

резидум фје f у тачки z_0 (резидум = остатак)

* Ако је изоловани сингуларитет у z_0 отклоњив, јасно је да је тада $\mathrm{Res}(f,z_0) = a_{-1} = 0$.

Ако је изоловани сингуларитет пол, онда можемо рачунати резидум и користити наредно тврђење:

(T1) Нека је функција f холоморфна у пробушеном диску $D^\times(z_0,r)$, при чему је z_0 њен пол реда $m \in \mathbb{N}$. Тада важи:

$$\boxed{\mathrm{Res}(f,z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \left((z-z_0)^m f(z)\right)^{(m-1)}}$$

! Ред пола m је најмање $m \in \mathbb{N}$ тако да је $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^m \cdot f(z)$ коначан. (једноставно следи из деф пола)

(T2) Ако су f, g холоморфне у $D(z_0,r)$ при чему важи $f(z_0) \neq 0$, $g(z_0) = 0$ и $g'(z_0) \neq 0$, онда је

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f}{g}, z_0\right) = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}.$$

(z_0 је тада пол фје $\frac{f}{g}$)

Ознака: $\mathrm{Res}(f,z_0) = \mathrm{Res}_{z=z_0} f(z)$ (користићемо обе ознаке)

① Израчунати $\underset{z=z_0}{\mathrm{Res}}\, f(z)$ ако је :

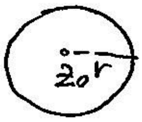
а) $f(z) = z\cdot e^{\frac{1}{z-1}}$ и $z_0=1$ в) $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z-i}$ и $z_0 = i$

б) $f(z) = \dfrac{z^4}{(z+2)^3}$ и $z_0=-2$

а) развијемо у Лоранов ред на прстену са центром z_0 и прочитамо a_{-1}

$$D^*(z_0,r) = A(z_0,0,r)$$

(r може бити и ∞)



На $D^*(z_0,r)$ је $0<|z-z_0|<r$

$$f(z) = z\cdot e^{\frac{1}{z-1}}$$

$z_0=1$

$$f(z) = (z-1+1)\cdot e^{\frac{1}{z-1}} = (z-1)\cdot e^{\frac{1}{z-1}} + e^{\frac{1}{z-1}}$$

$$= (z-1)\cdot \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,\frac{1}{(z-1)^n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{n-1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{(z-1)^n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-z_0)^n$$

$$a_{-1} = \frac{1}{2!} + \frac{1}{1!} = 1+\frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\underset{z=1}{\mathrm{Res}}\, f(z) = \frac{3}{2}}$$

А можемо и сасвим средити израз са леве стране :

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\,\frac{1}{(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{(z-1)^n}$$

$$= \frac{1}{(-1+1)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^{-1}} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{(z-1)^n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{(z-1)^n}$$

$$= \frac{1}{0!}\cdot(z-1) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}\right)\cdot\frac{1}{(z-1)^n}$$

$$= (z-1) + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}\right)\cdot\frac{1}{(z-1)^n}$$

a_{-1} се добија за $n=1$ у суми $\Rightarrow a_{-1} = \frac{1}{2!}+\frac{1}{1!} = \frac{3}{2}$

б) $f(z) = \dfrac{z^4}{(z+2)^3}$, $z_0 = -2$ прстен : $0 < |z+2| < \infty$

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^3} \cdot z^4 = \frac{1}{(z+2)^3} \cdot (z+2-2)^4 = \frac{1}{(z+2)^3} \cdot \left((z+2-2)^2 \right)^2$$

$$= \frac{1}{(z+2)^3} \cdot \left((z+2)^2 - 2 \cdot (z+2) \cdot 2 + 2^2 \right)^2$$

$$= \frac{1}{(z+2)^3} \cdot \left((z+2)^2 - 4(z+2) + 4 \right)^2$$

$$= \frac{1}{(z+2)^3} \cdot \left((z+2)^4 - 2 \cdot (z+2)^2 \cdot (4(z+2) - 4) + (4(z+2)-4)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{(z+2)^3} \left((z+2)^4 - 2 \cdot (z+2)^2 \cdot 4(z+2) + 8 \cdot (z+2)^2 + 16(z+2)^2 - 32(z+2) + 16 \right)$$

$$= \frac{1}{(z+2)^3} \cdot \left((z+2)^4 - 8(z+2)^3 + 24(z+2)^2 - 32(z+2) + 16 \right)$$

$$= (z+2) - 8 + \frac{24}{(z+2)} - \frac{32}{(z+2)^2} + \frac{16}{(z+2)^3}$$

$$\Rightarrow \operatorname*{Res}_{z=-2} f(z) = a_{-1} = 24$$

в) $f(z) = \dfrac{e^{\pi z}}{z - i}$, $z_0 = i$. прстен : $0 < |z-i| < \infty$

$$f(z) = \frac{e^{\pi(z-i) + i\pi}}{z-i} = \frac{e^{\pi(z-i)}}{z-i} \cdot \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1} = -\frac{1}{z-i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pi(z-i))^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-\pi^n (z-i)^{n-1}}{n!} \quad \Rightarrow \quad \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{за } n=0}}{a_{-1} =} \frac{-\pi^0}{0!} = -1$$

(2) Израчунати резидуме у свим сингуларитетима за функцију

$$f(z) = \frac{e^z}{z(1-z)^3}.$$

f је холоморфна на $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$

0 и 1 су изоловани сингуларитети

$z=0$: $\lim_{z\to 0} f(z) = \infty$, па је $z=0$ пол фје f

ред пола: $\lim_{z\to 0} (z-z_0)^1 \cdot f(z) = \lim_{z\to 0} \cancel{z} \cdot \frac{e^z}{\cancel{z}\cdot(1-z)^3} = 1$ па је ред пола 1

$$\overset{T1}{\Rightarrow} \quad \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{(1-1)!} \cdot \lim_{z\to 0} \left((z-0)\cdot f(z)\right) = \lim_{z\to 0} \frac{e^z}{(1-z)^3} = 1$$

$z=1$: $\lim_{z\to 1} f(z) = \infty$, па је $z=1$ пол фје f

ред пола: $\lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = \infty$

$\lim_{z\to 1} (z-1)^2 f(z) = \infty$

$\lim_{z\to 1} (z-1)^3 f(z) = \lim_{z\to 1} (z-1)^3 \frac{e^z}{z(1-z)^3} = \frac{-e}{1} = -e$

$\Rightarrow$ ред пола је 3

$$\overset{T1}{\Rightarrow} \quad \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{(3-1)!} \lim_{z\to 1} \left((z-1)^3 \cdot \frac{e^z}{z(1-z)^3}\right)^{(2)}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{z\to 1} \left(\frac{-e^z}{z}\right)^{(2)} = -\frac{1}{2} \lim_{z\to 1} \frac{e^z z^2 - e^z(z-1)\cdot 2}{z^3} = \frac{-e}{2}$$

$$\left(\frac{e^z}{z}\right)' = \frac{e^z \cdot z - e^z}{z^2} = \frac{e^z(z-1)}{z^2}$$

$$\left(\frac{e^z}{z}\right)'' = \frac{\left(e^z(z-1) + e^z\right)\cdot z^{\cancel{2}} - e^z\cdot(z-1)\cdot 2\cancel{z}}{z^4}$$

$$= \frac{e^z z^2 - e^z(z-1)\cdot 2}{z^3}$$

③ Одредити све полове, њихове редове и резидуме у њима за

$$f(z)=\frac{\sin 5z}{\sin 2z\cdot \sin 3z}.$$

Нађимо за које z је $\sin 2z=0$ и за које z је $\sin 3z=0$.
Тако ћемо добити сингуларитете ф-је f.

$$\sin 2z=\frac{e^{i2z}-e^{-i2z}}{2i}\quad,\ \sin 3z=\frac{e^{i3z}-e^{-i3z}}{2i}$$

Решимо једначину $\sin\omega=0$ (па убацимо $\omega=2z$ и $\omega=3z$):

$$\frac{e^{i\omega}-e^{-i\omega}}{2i}=0$$

$$e^{i\omega}-e^{-i\omega}=0 \quad / \cdot e^{i\omega}$$

$$e^{2i\omega}-1=0$$

$$e^{2i\omega}=1 \quad ,\ \omega=x+iy$$

$$e^{2i(x+iy)}=1$$

$$e^{2ix-2y}=1$$

$$e^{-2y}\cdot(\cos 2x+i\sin 2x)=1$$

$$\left.\begin{aligned} e^{-2y}\cdot\cos 2x&=1\\ e^{-2y}\sin 2x&=0\end{aligned}\right\}$$

$$e^{-2y}=1$$

$$\left.\begin{aligned}\cos 2x&=1\\ \sin 2x&=0\end{aligned}\right\}\quad 2x=2n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$$

$$x=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$$

$$-2y=0,\ \text{тј. } y=0$$

$\Rightarrow$ решења су: $\boxed{\omega=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}}$

$\omega=2z$: $\sin 2z=0$

$$\Rightarrow\quad 2z=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$$

$$z=\frac{n\pi}{2},\ n\in\mathbb{Z}$$

$\omega=3z$: $\sin 3z=0$

$$\Rightarrow\quad 3z=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$$

$$z=\frac{n\pi}{3},\ n\in\mathbb{Z}$$

f је аналитичка на

$$\mathbb{C}\setminus\left\{\frac{n\pi}{2},\frac{n\pi}{3}:\ n\in\mathbb{Z}\right\}$$

$k\in\mathbb{Z}$ $\quad \sin(z+2k\pi)=\dfrac{e^{i(z+2k\pi)}-e^{-i(z+2k\pi)}}{2i}=\dfrac{e^{iz}\cdot e^{i2k\pi}-e^{-iz}\cdot e^{-i2k\pi}}{2i}$

$$=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\sin z$$

$\sin(5(z+\frac{2k\pi}{5}))=\sin 5z$

$\sin(3(z+\frac{2k\pi}{3}))=\sin 3z \qquad k\in\mathbb{Z}$

$\sin(2(z+k\pi))=\sin 2z$

[$\sin(\omega+\pi)=-\sin\omega$]
важе адиционе формуле
(ПРОВЕРИТЕ!)

За $k=1$: $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{3}$ и π су периоди ове 3 ф-је

$\Rightarrow$ период од f је 2π

Да ли је основни, тј. да ли има и мањи период од овога?

Провером се добија да је $f(z+\pi)=f(z)$ $\left(\begin{array}{l}\sin(5(z+\pi))=-\sin 5z\\ \sin(3(z+\pi))=-\sin 3z\\ \sin(2(z+\pi))=\sin 2z\end{array}\right)$

$\Rightarrow$ Довољно је испитати сингуларитете на $[0,\pi]$.

Сингуларитети на $[0,\pi]$ су: $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$

$z=0$:

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\sin 5z}{\sin 2z\cdot\sin 3z}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\sin 5z}{5z}\cdot 5\cancel{z}}{\frac{\sin 2z}{2z}\cdot 2\cancel{z}\cdot\frac{\sin 3z}{3z}\cdot 3z}=\infty$$

(знамо $\frac{\sin z}{z}\xrightarrow[z\to 0]{}1$ следи из развоја)

$\Rightarrow z=0$ је пол ф-је f,

$$\lim_{z\to 0} z f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{\sin 5z}{5z}\cdot 5\cancel{z}\cdot\cancel{z}}{\frac{\sin 2z}{2z}\cdot 2\cancel{z}\cdot\frac{\sin 3z}{3z}\cdot 3\cancel{z}}=\frac{5}{6} \Rightarrow \text{ред пола је } 1$$

(Т1) $\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{(1-1)!}\cdot\lim_{z\to 0}(z\cdot f(z))=\frac{5}{6}$

[$\sin\frac{5\pi}{3}=\sin(\frac{2\pi}{3}+\pi)=-\sin\frac{2\pi}{3}$

$\sin 3z=-\sin(3z-\pi)$]

$\frac{\sin\frac{5\pi}{3}}{\sin\frac{2\pi}{3}}=-1$

$z=\frac{\pi}{3}$:
$$\lim_{z\to\frac{\pi}{3}} f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 5z}{\sin 2z\cdot\sin 3z}=\infty$$

$\Rightarrow \frac{\pi}{3}$ је пол ф-је f

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{3}}\left(z-\frac{\pi}{3}\right)f(z)=\lim_{z\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 5z}{\sin 2z}\cdot\frac{z-\frac{\pi}{3}}{\sin 3z}=\lim_{z\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 5z}{\sin 2z}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{3(z-\frac{\pi}{3})}{\sin(3(z-\frac{\pi}{3}))\cdot(-1)}=\frac{1}{3}$$