$\Rightarrow$ ред пола је 1

T1 $\Rightarrow \quad \operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{3}} f(z) = \lim\limits_{z\to\frac{\pi}{3}} \left(z-\frac{\pi}{3}\right) f(z) = \frac{1}{3}$

$\underline{z=\frac{\pi}{2}}$: $\quad \lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}} f(z) = \lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin 5z}{\sin 2z\cdot\sin 3z} = \infty$

$\sin\frac{5\pi}{2} = 1, \ \sin\frac{3\pi}{2} = -1$

$\sin(2z-\pi) = -\sin 2z$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2}$ је пол ф-је f

$$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \left(z-\frac{\pi}{2}\right) f(z) = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \left(z-\frac{\pi}{2}\right)\cdot \frac{\sin 5z}{\sin 2z\cdot \sin 3z} = \lim_{z\to\frac{\pi}{2}} \overbrace{\frac{\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2}{\sin\left(2\left(z-\frac{\pi}{2}\right)\right)}}^{\to 1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\overbrace{\frac{\sin 5z}{(-1)\cdot\sin 3z}}^{\to -1}$$

$$= \frac{1}{2}$$

T1 $\Rightarrow \quad \operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{2}} f(z) = \lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}} \left(z-\frac{\pi}{2}\right) f(z) = \frac{1}{2}$

$\underline{z=\frac{2\pi}{3}}$: $\quad \lim\limits_{z\to\frac{2\pi}{3}} \dfrac{\sin 5z}{\sin 2z\cdot\sin 3z} = \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{2\pi}{3}$ је пол

$\dfrac{\sin\frac{10\pi}{3}}{\sin\frac{4\pi}{3}} = 1$

$$\lim_{z\to\frac{2\pi}{3}} \left(z-\frac{2\pi}{3}\right)\cdot f(z) = \lim_{z\to\frac{2\pi}{3}} \left(z-\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\frac{\sin 5z}{\sin 2z\cdot\sin 3z} = \lim_{z\to\frac{2\pi}{3}} \overbrace{\frac{\sin 5z}{\sin 2z}}^{\to 1}\cdot\overbrace{\frac{\left(z-\frac{2\pi}{3}\right)\cdot 3}{\sin\left(3\left(z-\frac{2\pi}{3}\right)\right)}}^{\to 1}\cdot\frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$ ред пола је 1

T1 $\Rightarrow \quad \operatorname*{Res}_{z=\frac{2\pi}{3}} f(z) = \frac{1}{3}$

$\underline{z=\pi}$: $\quad \lim\limits_{z\to\pi} f(z) = \lim\limits_{z\to\pi} \dfrac{\sin 5z}{\sin 2z\cdot\sin 3z} = \lim\limits_{z\to\pi} \dfrac{\sin(5(z-\pi))\cdot(-1)}{\sin(2(z-\pi))\cdot\sin(3(z-\pi))\cdot(-1)}$

$$= \lim_{z\to\pi} \frac{\frac{\sin(5(z-\pi))}{5(z-\pi)}\cdot 5\cancel{(z-\pi)}}{\frac{\sin(2(z-\pi))}{2(z-\pi)}\cdot 2\cancel{(z-\pi)}\cdot\frac{\sin(3(z-\pi))}{3(z-\pi)}\cdot \underbrace{3(z-\pi)}_{\downarrow\, 0}} = \infty$$

$\Rightarrow z=\pi$ је пол

$\lim\limits_{z\to\pi} (z-\pi) f(z) = \ldots = \frac{5}{6} \quad$ T1 $\Rightarrow \quad \operatorname*{Res}_{z=\pi} f(z) = \frac{5}{6}$

Пошто је
$f(z) = f(z+\pi)$
ово је исто као
у $z=0$.

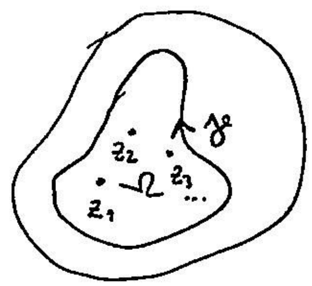
(T3)

Кошијева теорема о остацима

Нека је функција f холоморфна у неком отвореном скупу који садржи затворење ограничене области $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, осим у различитим изолованим сингуларитетима $z_1, z_2, \dots, z_n \in \Omega$, где је $n \in \mathbb{N}$. Нека је γ граница области Ω таква да је затворена, позитивно оријентисана и део по део глатка крива. Тада важи:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}(f, z_j)$$

f хол. на $\Omega \setminus \{z_1, z_2, \dots, z_n\}$

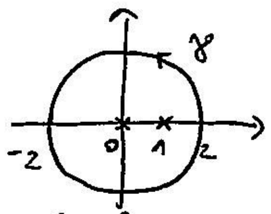


(1) Израчунати:

а) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz$, $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

б) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2}{\sin^3 z \cdot \cos z}\,dz$, $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

а) $f(z) = \dfrac{e^z}{z\cdot(1-z)^3}$,



f је холоморфна на $\mathbb{C} \setminus \{0,1\}$, 0 и 1 су полови ф-је f јер је

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{z\to 1} f(z) = \infty$$

$\displaystyle\lim_{z\to 0} z f(z) = 1$, па је 0 пол реда 1

$\displaystyle\lim_{z\to 1} (z-1)^3 f(z) = -e$, па је 1 пол реда 3

$$\left(\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)^2 f(z) = \infty\right)$$

(T1) $\Rightarrow$ $\displaystyle\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{(1-1)!}\lim_{z\to 0} z f(z) = 1$

$$\operatorname{Res}(f, 1) = \frac{1}{(3-1)!}\lim_{z\to 1}\left((z-1)^3 f(z)\right)^{(2)}$$

$$\mathrm{Res}(f,1)=\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to 1}\left((z-1)^3\cdot\frac{e^z}{z(1-z)^3}\right)^{(2)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\lim_{z\to1}\left(\frac{e^z}{-z}\right)^{(2)}=\frac{-1}{2}\cdot\lim_{z\to1}\left(\frac{e^z\cdot z-e^z}{z^2}\right)'$$

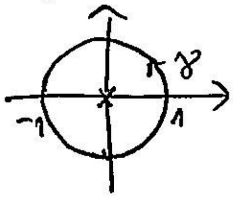
$$=\frac{-1}{2}\cdot\lim_{z\to1}\left(\frac{(e^z\cdot z+\cancel{e^z}-\cancel{e^z})\cdot z^2-(e^z\cdot z-e^z)\cdot 2z}{z^4}\right)$$

$$=\frac{-1}{2}\cdot e=\frac{-e}{2}$$

$$\Longrightarrow\quad \int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,dz=2\pi i\cdot\left(\mathrm{Res}(f,0)+\mathrm{Res}(f,1)\right)$$

$$=2\pi i\cdot\left(1-\frac{e}{2}\right)=\pi i\cdot(2-e)$$

б) $I=\int_\gamma \frac{z^2}{\sin^3 z\,\cos z}\,dz$, $\gamma(t)=e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$



$\sin z=0$ за $z=k\pi$

$\cos z=0$ за $z=k\pi+\frac{\pi}{2}$ (извести за домаћи)

f је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\left(\{k\pi : k\in\mathbb{Z}\}\cup\{k\pi+\frac{\pi}{2} : k\in\mathbb{Z}\}\right)$

! у $\mathrm{Int}\,\gamma$ се налази само 0 од свих изолованих сингул.

$$\lim_{z\to0}f(z)=\lim_{z\to0}\frac{\overbrace{z^2}^{\to 1}}{\sin^2 z\cdot\underbrace{\cos z}_{\to 1}\cdot\sin z}=\infty$$

$\Rightarrow$ $z=0$ је пол ф-је f

$$\lim_{z\to0}zf(z)=\lim_{z\to0}\frac{z^3}{\sin^3 z\cdot\cos z}=1$$

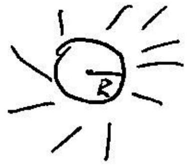
$\Rightarrow$ ред пола је 1

$\overset{(T1)}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{Res}(f,0)=\lim_{z\to0}zf(z)=1$

$\Rightarrow$ $I=2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,0)=2\pi i$

Резидум у ∞

∞ је изоловани сингуларитет за фју f ако постоји $R>0$ тако да је f холоморфна на $\underbrace{\{z\in\mathbb{C}: |z|>R\}}_{\text{ово је околина од } \infty}$



$$\operatorname{Res}(f,\infty) = \frac{-1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} f(z)\,dz$$

где је $\gamma_\rho(t) = \rho e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$, $\rho>R$

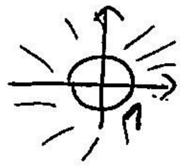
$\operatorname{Res}(f,\infty) = -a_{-1}$ $\quad a_{-1}$ коефицијент уз $\frac{1}{z}$ у Лорановом развоју око тачке ∞

(1) Израчунати:

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} \frac{e^{\frac{1}{z}}\cdot z^m}{z+1}, \quad m\in\mathbb{N}$$

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}\cdot z^m}{z+1}$$, f је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\{-1,0\}$

$\Rightarrow$ f је холоморфна и на $\{z\in\mathbb{C}: |z|>1\}$



$$f(z) = z^m\cdot\frac{1}{z(1+\frac{1}{z})}\cdot e^{\frac{1}{z}}$$

$$= z^{m-1}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{1}{z})}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}$$

$$= z^{m-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!\,z^n}$$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{z^n}, \quad b_n = \frac{1}{n!\,z^n}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{z^k}\cdot\frac{1}{(n-k)!\cdot z^{n-k}}$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(n-k)!}\right)\cdot\frac{1}{z^n}$$

$$f(z)=z^{m-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} c_n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(n-k)!}\right)\cdot\frac{1}{z^{n-m+1}}$$

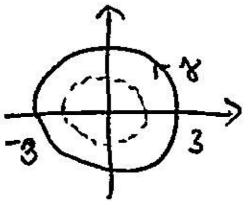
$n-m+1=1$ за $n=m$

$$\Rightarrow\ \mathrm{Res}(f,\infty)=-\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{(m-k)!}=\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^{k+1}}{(m-k)!}$$

(T4) Нека је $f:\mathbb{C}\setminus\{z_1,\dots,z_n\}\to\mathbb{C}$ холоморфна. Тада је:

$$\mathrm{Res}(f,\infty)+\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k)=0.$$

(2) Израчунати: $I=\int_\gamma\frac{dz}{z^5(z^{20}-3)}$ где је $\gamma(t)=3e^{it}$, $t\in[0,2\pi]$. (поз. ориј.)



$$f(z)=\frac{1}{z^5(z^{20}-3)}$$

f је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\{0,z_0,\dots,z_{19}\}$

$z_0,\dots,z_{19}$ 20ти корени из 3 - они се налазе на кружници полупречника $\sqrt[20]{3}<3$ (дакле, унутар криве γ се налазе)

$$\int_\gamma\frac{dz}{z^5(z^{20}-3)}=2\pi i\cdot\left(\mathrm{Res}(f,0)+\sum_{k=0}^{19}\mathrm{Res}(f,z_k)\right)\underset{(T4)}{=}-2\pi i\cdot\mathrm{Res}(f,\infty)$$

$$\frac{1}{z^5\cdot(z^{20}-3)}=\frac{1}{z^5}\cdot\frac{1}{z^{20}}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{3}{z^{20}}\right)}=\frac{1}{z^{25}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{z^{20}}\right)^n \quad , \left|\frac{3}{z^{20}}\right|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{z^{20n+25}}$$

(за $|z|^{20}>3$ тј. $|z|>\sqrt[20]{3}$)

$20n+25=1.$

$20n=-24$ нема решења у $\mathbb{Z}$

$\Rightarrow a_{-1}=0 \ \Rightarrow I=0$