• Модификована дурација:

Нека је у временском тренутку t_j $(1 \le j \le n)$ извршена уплата A_j којој одговара каматна стопа λ са k обрачуна годишње.

$$P_j = A_j \cdot \left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{-kt_j}$$

$$d = \frac{\sum t_j P_j}{\sum P_j}, \quad P = \sum_{j=1}^{n} P_j$$

Модификовану дурацију тог тока новца дефинишемо као:

$$\boxed{\tilde{d} = -\frac{P'_\lambda}{P}} \qquad (P'_\lambda \text{ извод од } P \text{ по } \lambda)$$

$$\tilde{d} = -\frac{1}{P}\cdot\left(\sum P_j\right)'_\lambda = \frac{-1}{P}\cdot\sum_{j=1}^{n}(P_j)'_\lambda = \frac{-1}{P}\cdot\sum_{j=1}^{n} A_j\cdot(-\cancel{k}t_j)\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{-kt_j-1}\cdot\frac{1}{\cancel{k}}$$

$$= \frac{-1}{P}\cdot\sum_{j=1}^{n} A_j\cdot(-1)\cdot t_j\cdot\frac{P_j}{A_j}\cdot\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{P}\cdot\frac{1}{1+\frac{\lambda}{k}}\cdot\sum_{j=1}^{n} t_j\cdot P_j = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{k}}\cdot\frac{\sum t_j P_j}{\sum P_j} = \frac{d}{1+\frac{\lambda}{k}}$$

$$\boxed{\tilde{d} = \frac{d}{1+\frac{\lambda}{k}}}$$

• Дурација обвезнице

$$t_j = \frac{j}{m}, \quad t = \frac{n}{m}$$

$$d = \frac{t \cdot \frac{R}{(1+\frac{a}{k})^{kt}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{m} \cdot \frac{\frac{Fr}{m}}{(1+\frac{a}{k})^{k\cdot\frac{j}{m}}}}{\frac{R}{(1+\frac{a}{k})^{kt}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\frac{Fr}{m}}{(1+\frac{a}{k})^{k\cdot\frac{j}{m}}}}$$

хоћемо да средимо S!

$$d = \frac{t \cdot \frac{R}{(1+\frac{a}{k})^{kt}} + \frac{Fr}{m^2} \cdot \overbrace{\sum_{j=1}^{n} \frac{j}{\left((1+\frac{a}{k})^{\frac{k}{m}}\right)^{j}}}^{S}}{\frac{R}{(1+\frac{a}{k})^{kt}} + \frac{Fr}{m} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{(1+\frac{a}{k})^{\frac{k}{m}}}\right)^{j}}_{\frac{1}{(1+\frac{a}{k})^{\frac{k}{m}}-1} \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+\frac{a}{k})^{kt}}\right]}} \qquad a = \frac{1}{(1+\frac{a}{k})^{\frac{k}{m}}}$$

$$S = \sum_{j=1}^{n} j \cdot a^j = a + 2a^2 + 3a^3 + \dots + na^n \quad / \cdot a$$

$$S \cdot a = a^2 + 2a^3 + 3a^4 + \dots + na^{n+1}$$

$$S - Sa = a + a^2 + a^3 + a + \dots + a^n - na^{n+1}$$

$$S(1-a) = a \cdot (1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}) - na^{n+1}$$

$$S = \frac{a}{1-a} \cdot \frac{1-a^n}{1-a} - na^{n+1} \cdot \frac{1}{1-a}$$

$$S = \frac{a}{(1-a)^2}\left(1 - a^n - n \cdot a^n \cdot (1-a)\right)$$

$$S = \frac{a}{(1-a)^2} \cdot \left(1 - (n+1)a^n + na^{n+1}\right)$$

$$\frac{a}{(1-a)^2} = \frac{(1+\frac{a}{k})^{-\frac{k}{m}}}{\left(1 - (1+\frac{a}{k})^{-\frac{k}{m}}\right)^2} = \frac{(1+\frac{a}{k})^{\frac{k}{m}}}{\left((1+\frac{a}{k})^{\frac{k}{m}} - 1\right)^2}$$

$$\boxed{d = \frac{t \cdot \frac{R}{(1+\frac{a}{k})^{kt}} + \frac{Fr}{m^2} \cdot \frac{(1+\frac{a}{k})^{\frac{k}{m}}}{\left((1+\frac{a}{k})^{\frac{k}{m}}-1\right)^2} \cdot \left[1 - \frac{n+1}{(1+\frac{a}{k})^{kt}} + \frac{n}{(1+\frac{a}{k})^{\frac{k\cdot(n+1)}{m}}}\right]}{\frac{R}{(1+\frac{a}{k})^{kt}} + \frac{F\cdot r}{m} \cdot \frac{1}{(1+\frac{a}{k})^{\frac{k}{m}}-1} \cdot \left[1 - \frac{1}{(1+\frac{a}{k})^{kt}}\right]}}$$

① Одредити дурацију и модификовану дурацију обвезнице од 1000€ са роком доспећа од 5 година ако је њена купонска стопа 5% са полугодишњим исплатом купона и добит до доспећа 7% са полугодишњим обрачуном.

$F = 1000 \ (=R)$

$t = 5$

$r = 5\% = 0{,}05$

$m = 2$

$\lambda = 7\% = 0{,}07$

$k = 2$

$\tilde{d} = ?, \ \tilde{\nu} = ?$

$n = mt = 10$

$$\tilde{\nu} = \frac{\tilde{d}}{1+\frac{\lambda}{k}} = \frac{\tilde{d}}{1+0{,}035} = \frac{\tilde{d}}{1{,}035}$$

$$\tilde{d} = \frac{5 \cdot \frac{1000}{1{,}035^{10}} + \frac{1000 \cdot 0{,}05}{2^2} \cdot \frac{1{,}035}{0{,}035^2} \cdot \left[1 - \frac{11}{1{,}035^{10}} + \frac{10}{1{,}035^{11}}\right]}{\frac{1000}{1{,}035^{10}} + \frac{1000 \cdot 0{,}05}{2} \cdot \frac{1}{0{,}035} \cdot \left[1 - \frac{1}{1{,}035^{10}}\right]}$$

$$\tilde{d} \approx \frac{4086{,}9142}{916{,}833947} \approx 4{,}4576$$

$$\tilde{\nu} \approx \frac{\tilde{d}}{1{,}035} \approx 4{,}3069$$

Портфолио

деф: Портфолио је колекција обвезница (или других вредносних папира).

Дурација портфолиа је тежинска сума дурације појединачних обвезница са тежинским коефицијентима пропорционалним цени обвезнице.

N број обвезница

P_j вредност j-те обвезнице $(1 \le j \le N)$

$\tilde{d}_j$ дурација j-те обвезнице

$\tilde{d}$ дурација портфолиа

$$\boxed{\tilde{d} = \frac{\sum_{j=1}^{N} \tilde{d}_j P_j}{\sum_{j=1}^{N} P_j}}$$

$$P = \sum_{j=1}^{N} P_j$$

$$\tilde{d} = \sum_{j=1}^{N} \tilde{d}_j \frac{P_j}{P}$$

② Портфолио се састоји од 3 обвезнице A, B и C. Вредности обвезница A, B и C износе редом 980€, 1015€ и 1000€ док су њихове дурације редом 21,46 година, 12,35 година и 16,67 година. Одредити дурацију портфолија.

$$\left.\begin{array}{l} P_A = 980 \\ P_B = 1015 \\ P_C = 1000 \\ \bar{d}_A = 21{,}46 \\ \bar{d}_B = 12{,}35 \\ \bar{d}_C = 16{,}67 \end{array}\right\} \bar{d} = \frac{\bar{d}_A \cdot P_A + \bar{d}_B P_B + \bar{d}_C P_C}{P_A + P_B + P_C} = 16{,}773$$

деф:

* Безкупонска обвезница – обвезница која има само једну исплату на дан доспећа (нема купонских исплата).

R откупна вредност безкупонске обвезнице

t време доспећа

r добит до доспећа са k обрачуна годишње

P садашња вредност безкупонске обвезнице

$$P = \frac{R}{\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}}, \quad \bar{d} = t$$

③ Портфолио се састоји од две безкупонске обвезнице A и B. Обвезница A има откупну вредност 1000€ и рок доспећа 2 године. Обвезница B има откупну вредност 1000€ и рок доспећа 4 године. Обе имају добит до доспећа 8% са годишњим обрачуном. Одредити дурацију портфолија.

$$\bar{d} = \frac{\bar{d}_A P_A + \bar{d}_B P_B}{P_A + P_B} \qquad \bar{d}_A = t_A, \ \bar{d}_B = t_B \text{ јер су безкупонске}$$

$R_A = R_B = 1000$

$r = 8\%$

$k = 1$

$t_A = 2$

$t_B = 4$

$P_A = R_A \cdot (1+r)^{-t_A}$

$P_B = R_B \cdot (1+r)^{-t_B}$

$$\bar{d} = \frac{2 \cdot 1000 \frac{1}{(1+0{,}08)^2} + 4 \cdot 1000 \cdot \frac{1}{(1+0{,}08)^4}}{\frac{1000}{1{,}08^2} + 1000 \cdot \frac{1}{1{,}08^4}} \approx 2{,}9232$$

④ Нека је $\bar{d}$ дурација тока новца који се одвија у временским тренуцима $\frac{1}{t_j+1}$ при чему је $t_j \geq 1$ и P садашња вредност појединачног тока који се десио у време $\frac{1}{t_j+1}$ за све $1 \leq j \leq n$. Доказати да је:

$$\left(\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} t_j} + 1\right)\bar{d} \geq 1.$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{t_j+1} \cdot P_j}{\sum_{j=1}^{n} P_j} \qquad P_j = P \quad \forall j \in \{1,2,\ldots,n\}$$

$$\bar{d} = \frac{P \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{t_j+1}}{n \cdot P} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{t_j+1}}{n} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{t_j+1} \overset{?}{\geq} \frac{1}{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} t_j} + 1}$$

$$\log \prod_{j=1}^{n} t_j = \sum_{j=1}^{n} \log t_j$$

$$\prod_{j=1}^{n} t_j = e^{\log \prod_{j=1}^{n} t_j} = e^{\sum_{j=1}^{n} \log t_j}$$

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{e^{\log t_j} + 1} \overset{?}{\geq} \frac{1}{e^{\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \log t_j} + 1}$$

$$f(x) = \frac{1}{e^{x}+1}$$

$$\bar{d} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} f(\log t_j) \underset{?}{\geq} f\left(\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \log t_j\right) \quad (*)$$

Јенсенова неједнакост: $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = \frac{1}{n} \quad \lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1 \quad x_j = \log t_j$

$$f(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n)$$

ако је f конвексна

$$f\left(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \cdot (f(x_1) + \ldots + f(x_n))$$

$$f\left(\frac{\log t_1 + \ldots + \log t_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \cdot (f(\log t_1) + \ldots + f(\log t_n))$$

А што је управо $(*)$!

Остаје да се докаже још да је f конвексна.

$$f'(x) = \frac{1}{(e^x+1)^2}\cdot(-e^x)$$

$$f''(x) = \left(\frac{-e^x}{(e^x+1)^2}\right)' = \frac{-e^x(e^x+1)^2 + e^x \cdot 2(e^x+1)\cdot e^x}{(e^x+1)^4} = \frac{-e^x(e^x+1)+2e^{2x}}{(e^x+1)^3}$$

$$= \frac{e^{2x}-e^x}{(e^x+1)^3} = \frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3} \geq 0 \quad \text{јер } e^x \geq 1 \text{ за } x \geq 0$$

$$f''(x) \geq 0 \text{ за } x \geq 0$$

$$\Rightarrow f \text{ је конвексна на } [0,+\infty)$$

⑤ Нека је $\bar{d}$ дурација тока новца који се одвија у временским тренуцима $t_j \in (\frac{1}{2}, 1)$, при чему је P садашња вредност појединачног тока који се десио у време t_j за све $1 \leq j \leq n$. Доказати да је:

$$(1-\bar{d})\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} t_j} \geq \bar{d}\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}(1-t_j)}.$$

$$P_j = P \quad \forall j \in \{1,\dots,n\} \Rightarrow \bar{d} = \frac{\sum t_j P_j}{\sum P_j} = \frac{P\sum t_j}{nP} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} t_j$$

Треба доказати:
$$\frac{\bar{d}}{1-\bar{d}} \overset{?}{\leq} \sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n}\frac{t_j}{1-t_j}} \quad / \ln$$

$$\ln\frac{\bar{d}}{1-\bar{d}} \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\ln\frac{t_j}{1-t_j}, \quad f(x) = \ln\frac{x}{1-x}$$

$$f(\bar{d}) \leq \frac{1}{n}\cdot\sum_{j=1}^{n} f(t_j)$$

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} t_j\right) \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(t_j)$$ ово важи ако је f конвексна на $[\frac{1}{2}, 1]$ (Јенсенова неједнакост)

$$f'(x) = \frac{1-x}{x}\cdot\frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{x(1-x)}$$

$$f''(x) = \frac{-(1-x+x(-1))}{x^2(1-x)^2} = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2} \geq 0 \text{ за } x \in [\tfrac{1}{2}, 1] \Rightarrow f \text{ је конвексна на } [\tfrac{1}{2}, 1]!$$