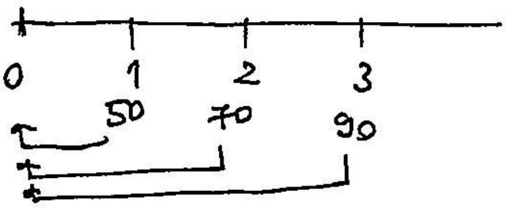
① Одредити вредност обвезнице од 1000€ са роком доспећа од 3 године и годишњим купонима од 50€ за прву, 70€ за другу и 90€ за трећу годину ако је добит до доспећа променљива каматна стопа

$$\lambda(t)=\frac{2t-1}{2(t^2-t+1)}.$$

$F=1000=R$

$t=3$

$\lambda(t)=\dfrac{2t-1}{2(t^2-t+1)}$



P вредност обвезнице у садашњем тренутку $(t=0)$

= откупна вредност обвезнице у садашњем тренутку

\+ вредност сваког купона у садашњем тренутку

$$P=\underbrace{1000\cdot e^{-\int_0^3\lambda(t)dt}}_{\text{откупна вр. у садашњем тренутку}}+\underbrace{50\cdot e^{-\int_0^1\lambda(t)dt}+70\cdot e^{-\int_0^2\lambda(t)dt}+90\cdot e^{-\int_0^3\lambda(t)dt}}_{\text{вредности купона у садашњем тренутку}}$$

$$\int\lambda(t)\,dt=\int\frac{2t-1}{2(t^2-t+1)}dt=\left(\begin{array}{l}u=t^2-t+1\\ du=(2t-1)dt\end{array}\right)$$

$$=\int\frac{du}{2u}=\frac{1}{2}\ln|u|+C=\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)+C$$

$$\int_0^3\lambda(t)dt=\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)\Big|_0^3=\frac{1}{2}\ln 7=\ln\sqrt{7}$$

$$\int_0^2\lambda(t)dt=\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)\Big|_0^2=\frac{1}{2}\ln 3=\ln\sqrt{3}$$

$$\boxed{P\approx 502{,}396}$$

$$\int_0^1\lambda(t)dt=\frac{1}{2}\ln(t^2-t+1)\Big|_0^1=0$$

$\Uparrow$

$$P=1000\cdot e^{-\ln\sqrt{7}}+50\cdot e^{0}+70\cdot e^{-\ln\sqrt{3}}+90\cdot e^{-\ln\sqrt{7}}=\frac{1000}{\sqrt{7}}+50+\frac{70}{\sqrt{3}}+\frac{90}{\sqrt{7}}\approx 502{,}396$$

дефиниција:

Дурација (трајање) тока новца који се одвија у временским тренуцима t_j $(1\le j\le n)$ дефинише се као

$$\tilde{d}=\frac{\sum_{j=1}^{n} t_j\cdot P_j}{\sum_{j=1}^{n} P_j}$$

где је P_j садашња вредност појединачног тока новца који се деси у време t_j $(1\le j\le n)$

---

② За обвезницу од 1000€ и роком доспећа од 3 године потребно је исплатити годишње купоне од по 100€ на крају сваке од те 3 године до доспећа. Одредити дурацију те обвезнице ако је добит до доспећа 20% са годишњим обрачуном.

$F=1000(=R)$

$t=3$

$r=0{,}2$

$k=1$

100€ вредност купона за сваку од 3 године

! Ток новца ове обвезнице се састоји од ① исплате откупне вредности након 3 године и исплате купона од по 100€ након прве, друге и треће године. ②

$\tilde{d}=?$

Садашња вредност тока 1: $1000\cdot(1+0{,}2)^{-t}$, $t=3$

Садашња вредност тока 2: $100\cdot(1{,}2)^{-1}$
(за купоне) $100\cdot(1{,}2)^{-2}$
$100\cdot(1{,}2)^{-3}$

коришћена формула

$A=P\cdot\left(1+\frac{r}{k}\right)^{kt}$

$P=A\cdot\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-kt}$

$k=1$

$$P_1=\frac{100}{1{,}2},\quad P_2=\frac{100}{(1{,}2)^2},\quad P_3=\frac{100}{(1{,}2)^3}$$

$$P_0=\frac{1000}{(1{,}2)^3}$$

$$\Rightarrow\ \tilde{d}=\frac{1\cdot\frac{100}{1{,}2}+2\cdot\frac{100}{(1{,}2)^2}+3\cdot\frac{100}{(1{,}2)^3}+3\cdot\frac{1000}{(1{,}2)^2}}{\frac{100}{1{,}2}+\frac{100}{(1{,}2)^2}+\frac{100}{(1{,}2)^3}+\frac{1000}{(1{,}2)^3}}\quad /\cdot(1{,}2)^3$$

$$\tilde{d}=\frac{1{,}2^2\cdot100+2\cdot1{,}2\cdot100+300+3000}{(1{,}2)^2\cdot100+1{,}2\cdot100+1100}\approx 2{,}7$$

③ Нека је $\bar{d}_1$ дурација првог тока новца који се одвија у временским тренуцима t_j, где је P_j садашња вредност појединачног тока који се десио у време t_j, за све $1 \le j \le n$ и $\bar{d}_2$ дурација другог тока новца који се одвија у вр. тр. t_j, где је P_{n+1-j} садашња вредност појединачног тока који се десио у вр. тр. t_j за све $1 \le j \le n$, при чему је $t_1 \le t_2 \le \dots \le t_n$ и $P_1 \le \dots \le P_n$.

Доказати: $\bar{d}_1 \geq \bar{d}_2$.

$$\left.\begin{array}{l} \bar{d}_1 = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} t_j P_j}{\sum_{j=1}^{n} P_j} \quad \text{дурација I тока} \\[2ex] \bar{d}_2 = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} t_j \cdot P_{n+1-j}}{\sum_{j=1}^{n} P_{n+1-j}} \quad \text{дурација II тока} \end{array}\right\}$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_{n+1-j} = P_n + P_{n-1} + \dots + P_1$$

$$\sum_{j=1}^{n} P_j = \sum_{j=1}^{n} P_{n+1-j}$$

Довољно је онда доказати:

$$\sum_{j=1}^{n} t_j P_j \geq \sum_{j=1}^{n} t_j P_{n+1-j}$$

$$\sum_{j=1}^{n} t_j (P_j - P_{n+1-j}) \geq 0$$

$$S = t_1 \cdot (P_1 - P_n) + t_2 \cdot (P_2 - P_{n-1}) + t_3 (P_3 - P_{n-2}) + \dots + t_n (P_n - P_1) \geq 0$$

$$\boxed{S \geq 0 \ ?}$$

$$2S = t_1 \cdot (P_1 - P_n) + t_n (P_n - P_1) + t_2 (P_2 - P_{n-1}) + t_{n-1} (P_{n-1} - P_2) + \dots + t_n (P_n - P_1) + t_1 (P_1 - P_n)$$

$$= \underbrace{(t_n - t_1)}_{\geq 0} \underbrace{(P_n - P_1)}_{\geq 0} + \underbrace{(t_{n-1} - t_2)}_{\geq 0} \underbrace{(P_{n-1} - P_2)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{(t_n - t_1)}_{\geq 0} \underbrace{(P_n - P_1)}_{\geq 0} \geq 0$$

$$\Rightarrow S \geq 0$$

$$\left(\begin{array}{l} S = t_1 \cdot (P_1 - P_n) + t_2 (P_2 - P_{n-1}) + t_3 (P_3 - P_{n-2}) + \dots + t_n (P_n - P_1) \\ S = t_n (P_n - P_1) + t_{n-1} (P_{n-1} - P_2) + t_{n-2} (P_{n-2} - P_3) + \dots + t_1 (P_1 - P_n) \end{array} \right)$$

④ У временском тренутку $t_j = j$ $(1 \le j \le n)$ извршена је уплата A_j којој одговара каматна стопа λ са k обрачуна годишње. Доказати да је дурација $\bar{d}$ овог тока новца опадајућа функција по λ.

P_j садашња вредност појединачног тока који се десио у тр. $t_j = j$

$$P_j = A_j \cdot \left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{-k t_j} = A_j \cdot \left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{-k \cdot j} \qquad a = \left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{-k}$$

$$P_j = A_j \cdot a^j$$

$$\bar{d} = \frac{\sum t_j P_j}{\sum P_j} = \frac{\sum j \cdot A_j \cdot a^j}{\sum a^j \cdot A_j} \quad , a = a(\lambda) = \left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{-k}$$

можемо a посматрати

као фју по λ

$$\Rightarrow \quad \bar{d}(\lambda) = \frac{\sum_{j=1}^{n} j A_j \cdot (a(\lambda))^j}{\sum_{j=1}^{n} (a(\lambda))^j \cdot A_j} \quad (\text{и } \bar{d} \text{ видимо зато као фју по } \lambda)$$

Докажимо да је $\bar{d}'(\lambda) \le 0 \quad \underline{\forall \lambda > 0}$

$$\bar{d}'(\lambda) = \frac{\sum_{j=1}^{n} j A_j \left((a(\lambda))^j\right)' \cdot \sum a(\lambda)^j A_j - \sum j A_j a(\lambda)^j \cdot \sum (a(\lambda)^j)' \cdot A_j}{\left(\sum_{j=1}^{n} (a(\lambda))^j A_j\right)^2}$$

$$(a(\lambda)^j)' = j \cdot a(\lambda)^{j-1} \cdot a'(\lambda) = j \cdot a(\lambda)^{j-1} \cdot \left(-a(\lambda)^{1+\frac{1}{k}}\right) = j \cdot (-1) \cdot a(\lambda)^{j+\frac{1}{k}}$$

$$a'(\lambda) = -k \cdot \left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{-k-1} \cdot \frac{1}{k} = -\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{-k-1} = -a(\lambda) \cdot \left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{-1} = -a(\lambda) \cdot a(\lambda)^{1/k}$$

$$\bar{d}' = \frac{\sum_{j=1}^{n} j A_j \cdot (-1) j \cdot a^{j+\frac{1}{k}} \cdot \sum a^j A_j - \sum j A_j a^j \cdot \sum -j a^{j+\frac{1}{k}} \cdot A_j}{\left(\sum_{j=1}^{n} a^j A_j\right)^2}$$

$$= -a^{\frac{1}{k}} \cdot \frac{1}{\left(\sum a^j A_j\right)^2} \cdot \left(\left(\sum j^2 A_j \cdot a^j\right)\left(\sum a^j A_j\right) - \left(\sum j A_j a^j\right) \cdot \left(\sum j a^j A_j\right)\right) \overset{?}{\le} 0$$

Довољно је још доказати $\left(\sum j^2 A_j a^j\right) \cdot \left(\sum a^j A_j\right) \ge \left(\sum j A_j a^j\right)^2$

* Коши-Шварцова неједнакост :

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n} a_j^2\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} b_j^2\right)$$

$=$ акко $a_i \cdot b_j = a_j \cdot b_i$ за све $i<j$

Применом К-Ш неједнакости:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \underbrace{j A_j a^j}_{a_j \cdot b_j \text{ из КШ}}\right)^2 \le \left(\sum_{j=1}^{n} j^2 A_j \cdot a^j\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} a^j A_j\right)$$

$$a_j = j A_j^{1/2} a^{j/2}$$

$$b_j = a^{j/2} A_j^{1/2}$$

добили смо баш оно што треба!

$$\Rightarrow d'(\lambda) \le 0$$

$$\Rightarrow \vec{d} \downarrow$$