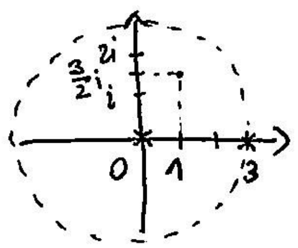
(7) Функцију $f(z)=\frac{1}{z(z-3)^2}$ представити Лорановим развојем у прстену

а) са центром 0, тако да конвергира у тачки 1.

б) са центром 1, тако да конвергира у тачки $1+\frac{3}{2}i$.

$f(z)=\frac{1}{z(z-3)^2}$ $\quad f$ је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\{0,3\}$



а) Можемо узети прстен $A(0,0,3)=\{z\in\mathbb{C} : 0<|z|<3\}$, $1\in A(0,0,3)$

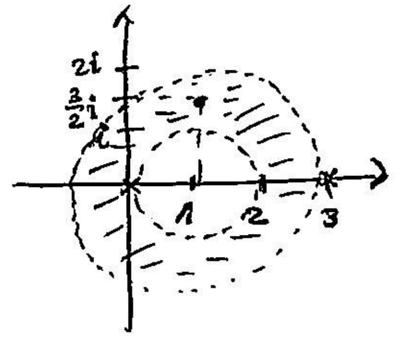
$\left|\frac{z}{3}\right|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{(z-3)^2}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{z}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{z}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{9}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot z^{n-2}}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n z^{n-2}}{3^{n+1}}$$

к. за $0<|z|<3$

б)



Можемо узети прстен $A(1,1,2)=\{z\in\mathbb{C} : 1<|z-1|<2\}$, $1+\frac{3}{2}i\in A(1,1,2)$

$\frac{1}{|z-1|}<1$, $\left|\frac{z-1}{2}\right|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z(z-3)^2}=\frac{1}{(z-1+1)(z-1-2)^2}\overset{\omega=z-1}{=}\frac{1}{(\omega+1)\cdot(\omega-2)^2}=\frac{A}{\omega+1}+\frac{B}{\omega-2}+\frac{C}{(\omega-2)^2}$$

$$1=A\cdot(\omega-2)^2+B(\omega+1)(\omega-2)+C\cdot(\omega+1)$$

$$1=A\omega^2-2A\omega\cdot 2+4A+B\omega^2-B\omega-2B+C\omega+C$$

$$1=(A+B)\omega^2+\omega(-4A-B+C)+4A-2B+C$$

$$\left.\begin{aligned} A+B&=0\\ -4A-B+C&=0\\ 4A-2B+C&=1 \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} B&=-A\\ -4A+A+C&=0\\ 4A+2A+C&=1 \end{aligned} \qquad \left.\begin{aligned} -3A+C&=0\\ 6A+C&=1 \end{aligned}\right\} - \qquad 9A=1 \quad \boxed{A=\frac{1}{9}}$$

$$\boxed{C=3A=\frac{1}{3}},\ \boxed{B=\frac{-1}{9}}$$

$$f(z)=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{w+1}+\frac{-1}{9}\cdot\frac{1}{w-2}+\frac{1}{3\cdot(w-2)^2}, \quad 1<|w|<2$$

тј. $\left|\frac{w}{2}\right|<1$ и $\frac{1}{|w|}<1$

$$f(z)=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{w}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{w}}-\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2\left(\frac{w}{2}-1\right)}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2^2\left(\frac{w}{2}-1\right)^2}$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{w}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{w^n}+\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{1-\frac{w}{2}}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{w}{2}\right)^2}$$

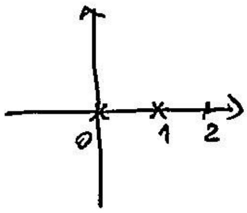
$$=\frac{1}{9}\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{w^{n+1}}}_{\frac{1}{|w|}<1}+\frac{1}{18}\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w}{2}\right)^n}_{\left|\frac{w}{2}\right|<1}+\frac{1}{12}\cdot\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\left(\frac{w}{2}\right)^{n-1}}_{\left|\frac{w}{2}\right|<1}$$

$$=\frac{1}{9}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}+\frac{1}{9}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^{n+1}}+\frac{1}{12}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\,\frac{(z-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{9(z-1)^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{9\cdot2^{n+1}}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(z-1)^{n-1}}{3\cdot2^{n+1}}$$

⑧ функцију $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z}}}{z(1-z)}$ представити Лорановим развојем у прстену са центром 0, тако да конвергира у тачки 2.

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{z(1-z)} \quad \text{је холоморфна на } \mathbb{C}\setminus\{0,1\}$$



Можемо узети прстен

$$A(0,1,\infty)=\{z\in\mathbb{C}: 1<|z|<\infty\}$$

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-z}=e^{\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{-1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=e^{\frac{1}{z}}\cdot\frac{-1}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n}=-e^{\frac{1}{z}}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}$$

$$=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}$$

---

* Множење редова : $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_n=\sum_{n=0}^{\infty}c_n$

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$$

Ова важи ако $\sum a_n, \sum b_n$ и $\sum c_n$ сви конвергирају или ако $\sum a_n$ и $\sum b_n$ конвергирају апсолутно.

* За $|z|>1$ редови $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}$ и $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+2}}$ конвергирају апсолутно, па можемо искористити формуле.

$$a_n=\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{z^n}, \quad b_n=\frac{1}{z^{n+2}}$$

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{z^k}\cdot\frac{1}{z^{n-k+2}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{z^{n+2}}$$

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\cdot\frac{1}{z^{n+2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)\cdot\frac{1}{z^{n+2}}}$$

Изоловани сингуларитети:

- пп. да је f холоморфна на пробушеном диску $D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$ (означавамо и $D^*(z_0,R) = D(z_0,R)\setminus\{z_0\}$). Тада z_0 називамо <u>изоловани сингуларитет</u>.
- пробушени диск се у $\mathbb{C}$ може видети као прстен

  $D^*(z_0,R) = A(z_0,0,R)$, па на основу т. о Лорановом развоју добијамо да се f у $D^*(z_0,R)$ може представити Лорановим развојем, тј.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad \forall z \in D^*(z_0,R)$$

- Кажемо да је изоловани сингуларитет z_0 ф-је f <u>отклоњив</u> ако важи $a_n = 0, \forall n<0$. Тада је за $f(z_0)=a_0$ добијена ф-ја f холоморфна на $D(z_0,R)$.
- Кажемо да је изоловани сингуларитет z_0 ф-је f <u>пол</u> ф-је f ако $\exists m \in \mathbb{N}$ тд. је $a_{-m} \neq 0$ и $a_n = 0$ за све $n<-m$. (m се назива <u>ред</u> пола)
- Кажемо да је изоловани сингуларитет z_0 ф-је f <u>есенцијални сингуларитет</u> ф-је f ако важи $a_n \neq 0$ за бесконачно много вредности $n<0$.

- Сваки изоловани сингуларитет од f мора бити или отклоњив, или пол или есенцијални сингуларитет.

<u>Тврђење</u>: Изоловани сингуларитет z_0 ф-је f је:

1) отклоњив акко постоји коначан $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$
2) пол акко је $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty$
3) есенцијални сингуларитет акко $\nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Тврђење 2: Нека је $f: D^{*}(z_0,R) \to \mathbb{C}$ холоморфна и ограничена фја. Тада је z_0 отклоњив сингуларитет фје f.

① Одредити сингуларитете и њихове типове за фје:

а) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^2}$ б) $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ в) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$ г) $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^3}$

а) f је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow$ 0 је изоловани сингуларитет

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1}{2} \quad (\text{добија се преко развоја})$$

$\Rightarrow$ $z=0$ је отклоњив сингуларитет

б) $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$

f је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow$ 0 је изоловани сингуларитет

За $z = x > 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(z) = \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

За $z = x < 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(z) = \lim_{x\to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = \infty$$

$\Rightarrow$ $\nexists \lim_{z\to 0} e^{-\frac{1}{z}}$

$\Rightarrow$ 0 је есенцијални сингуларитет

в) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$

f је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow$ 0 је изоловани сингуларитет

$$f(z) = \frac{1}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\cdot z^{2n-1}$$

$$= \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\cdot z + \frac{1}{5!}\cdot z^3 + \dots$$

$\Rightarrow$ 0 је пол реда 1

г) $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^3}$ f је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\{2\}$

$\Rightarrow$ 2 је изоловани сингуларитет фје f

2 је пол реда 3 фје f (f је већ у развијеном облику)

② Дати пример сингуларитета који није изолован.

$f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}$, $z=0$ је сингуларитет који није изолован

$\sin\frac{1}{z}=0$ за $\frac{1}{z}=n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$

f је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\left(\left\{\frac{1}{n\pi}:\underset{n\neq 0}{n\in\mathbb{Z}}\right\}\cup\{0\}\right)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n\pi}=0$ у свакој околини 0 постоји бесконачно много сингуларитета

додатак:

① б) други начин

$$f(z)=e^{-\frac{1}{z}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,z^n}=1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2!\,z^2}-\frac{1}{3!\,z^3}+\dots$$

Из Лорановог развоја видно да за бесконачно много m важи $a_m\neq 0$, $m<0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,z^n}\underset{m=-n}{=}\sum_{m=-\infty}^{0}\frac{(-1)^{-m}}{(-m)!\,z^{-m}}=\sum_{m=-\infty}^{0}\frac{(-1)^m z^m}{(-m)!}$$

$$a_m=\frac{(-1)^m}{(-m)!}\neq 0$$

за све $m<0$

$\Rightarrow$ 0 је есенцијални сингуларитет

а) развој:

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$$

$$1-\cos z=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n}$$

$$\frac{1-\cos z}{z^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n-2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4!}z^2+\frac{1}{6!}z^4-\dots$$

$\Rightarrow a_k=0$ за $k<0$, па је 0 отклоњив сингулар.