Лоранов развој и изоловани сингуларитети

Прстен: $A(z_0,r,R)=\{z\in\mathbb{C} : r<|z-z_0|<R\}$, $0\le r<R\le\infty$

Прстен са центром z_0 и полупречницима r и R

Теорема: (Лоранов развој)

Нека је фја $f: A(z_0,r,R)\to\mathbb{C}$ холоморфна у $A(z_0,r,R)$. Тада важи:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \forall z\in A(z_0,r,R),$$

где је
$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz, \quad \forall n\in\mathbb{Z},$$

при чему је γ_ρ позитивно оријентисана кружница са центром z_0 и полупречника $\rho\in(r,R)$.

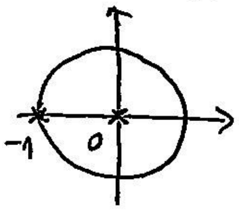
$$\gamma_\rho(t)=z_0+\rho e^{it}, \quad t\in[0,2\pi]$$

1) Функцију $f(z)=\frac{1}{z^2+z}$ представити Лорановим развојем у прстену $A(0,0,1)=\{z\in\mathbb{C} : 0<|z|<1\}$.

$$f(z)=\frac{1}{z^2+z}=\frac{1}{z(z+1)}$$

f је аналитичка на $\mathbb{C}\setminus\{0,-1\}$

$\Rightarrow$ f је аналитичка на $A(0,0,1)=\mathbb{D}\setminus\{0\}$



Користимо познат развој: $\frac{1}{1-\omega}=\sum_{n=0}^{\infty}\omega^n, \ |\omega|<1$

(Битно је да добијемо ред који конвергира на прстену!)

I начин:
$$f(z)=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1}$$
$$\frac{1}{z(z+1)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z+1} \quad /\cdot(z+1)z$$
$$1=Az+A+Bz$$
$$A+B=0$$
$$A=1 \quad B=-1$$

$$f(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{z+1}$$

већ развијено

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{1-(-z)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n \quad \text{за } |z|<1$$

$$f(z)=\underbrace{\frac{1}{z}}_{|z|>0}-\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n}_{\text{конв. за } |z|<1}=\frac{1}{z}-1+z-z^2+z^3-\dots$$

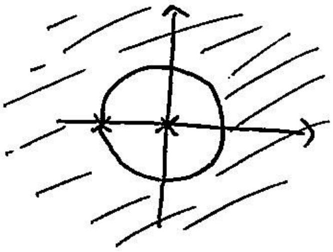
важи за $0<|z|<1$ тј. на прстену $A(0,0,1)$

II начин:

$$f(z)=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-(-z)}=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{n-1}$$

$$=\frac{1}{z}-1+z-z^2+z^3-\dots$$ важи на $A(0,0,1)$

② Функцију $f(z)=\frac{1}{z^2+z}$ представити Лорановим развојем у прстену $A(0,1,+\infty)=\{z\in\mathbb{C}: 1<|z|<\infty\}$.



f је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\{0,-1\}$

па је холоморфна и на $A(0,1,+\infty)$

$$f(z)=\frac{1}{z(z+1)}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{z(1+\frac{1}{z})}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{1-(-\frac{1}{z})}$$

$$=\frac{1}{z^2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{z^{n+2}}$$

конвергира за $\frac{1}{|z|}<1$

тј. за $|z|>1$

$\Rightarrow$ конвергира на $A(0,1,+\infty)$

Објашњење:

Развој $\frac{1}{1-\omega}=\sum_{n=0}^{\infty}\omega^n$ важи за $|\omega|<1$.

На $A(0,1,+\infty)$ је $\frac{1}{|z|}<1$, па намештамо тако да буде $\omega=\frac{1}{z}$.

③

Функцију $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$ представити Лорановим развојем у прстену:

а) $A(0,1,2)=\{z\in\mathbb{C}: 1<|z|<2\}$

б) $A(0,0,1)=\{z\in\mathbb{C}: 0<|z|<1\}$

в) $A(0,2,\infty)=\{z\in\mathbb{C}: 2<|z|<\infty\}$

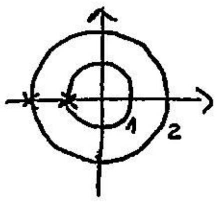
$$f(z)=\frac{2z+3}{z^2+3z+2}=\frac{2z+3}{(z+1)(z+2)}=\frac{A}{z+1}+\frac{B}{z+2} \quad /(z+1)(z+2)$$

$$2z+3=Az+2A+Bz+B$$

$$A+B=2\ ,\ 2A+B=3 \ \Rightarrow\ A=1=B$$

$$f(z)=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}$$

f је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\{-1,-2\}$

а) 

f је холоморфна и на $A(0,1,2)$

На $A(0,1,2)$ је $\frac{1}{|z|}<1$ и $\left|\frac{z}{2}\right|<1$

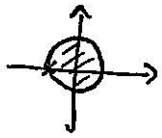
$$f(z)=\frac{1}{1+z}+\frac{1}{2+z}=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{z}}+\frac{1}{2\left(1+\frac{z}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{-1}{z}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{-z}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}+\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{2}\right)^n$$

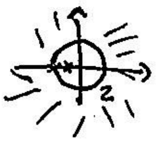
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-z)^n}{2^{n+1}}$$

$$=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^{n+1}}}_{\text{к. за } \left|\frac{1}{z}\right|<1 \text{ тј. } |z|>1}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n}_{\text{к. за } \left|\frac{z}{2}\right|<1 \text{ тј. } |z|<2} \quad \text{важи за } 1<|z|<2$$

б)  $0<|z|<1$

$$f(z)=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}=\frac{1}{1-(-z)}+\frac{1}{2\left(1-\frac{-z}{2}\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n+\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{2}\right)^n$$

$$=\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n}_{\text{к. за } |z|<1}+\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}z^n}_{\text{к. за } |z|<2} \qquad \text{за } |z|<1$$

в) 

$|z|>2$

$\left|\frac{2}{z}\right|<1$

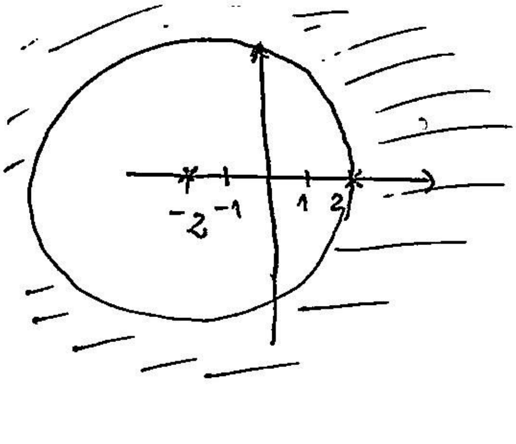
$$f(z)=\frac{1}{z+1}+\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z\left(1-\frac{-1}{z}\right)}+\frac{1}{z\left(1-\frac{-2}{z}\right)}$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{z}\right)^n+\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-2}{z}\right)^n$$

$$=\frac{1}{z}\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{z^n}}_{\text{к. за } |z|>1}+\frac{1}{z}\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{z^n}}_{\text{к. за } |z|>2} \qquad \text{важи за } |z|>2$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+(-2)^n}{z^{n+1}} \qquad \text{важи за } |z|>2$$

4) Функцију $f(z)=\frac{1}{(z^2-4)^2}$ представити Лорановим развојем у прстену $\{z\in\mathbb{C} : 4<|z+2|<\infty\}=A(-2,4,\infty)$.



f је аналитичка на $\mathbb{C}\setminus\{2,-2\}$

$\Rightarrow$ f је аналитичка на $A(-2,4,\infty)$

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)^2(z+2)^2}$$

$\left|\frac{4}{z+2}\right|<1$ на овом прстену

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\cdot(z+2)^n$$

$$f(z)=\underbrace{\frac{1}{(z+2)^2}}_{\text{овај део већ развијен}}\cdot\frac{1}{(z-2)^2}$$

$$\frac{1}{1-\omega}=\sum_{n=0}^{\infty}\omega^n \quad , |\omega|<1$$

$$\frac{1}{(1-\omega)^2}=\left(\frac{1}{1-\omega}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot\omega^{n-1} \quad , |\omega|<1$$

$\uparrow$

(треба нам ово сада)

$\omega = \frac{4}{z+2}$ јер $|\omega|<1$

$$\frac{1}{(z-2)^2} = \frac{1}{(z+2-4)^2} = \frac{1}{(z+2)^2\cdot\left(1-\frac{4}{z+2}\right)^2} = \frac{1}{(z+2)^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{4}{z+2}\right)^{n-1}$$

$$f(z) = \frac{1}{(z+2)^4}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\frac{4^{n-1}}{(z+2)^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 4^{n-1}}{(z+2)^{n+3}}$$ важи за $|z+2|>4$
тј. важи на $A(-2,4,\infty)$

5) Функцију $f(z)=z^4\cos\frac{1}{z}$ представити Лорановим развојем у прстену $A(0,0,\infty)=\{z\in\mathbb{C} : 0<|z|<\infty\}$.

$$f(z)=z^4\cos\frac{1}{z} = z^4\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{1}{z^{2n}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot\frac{1}{z^{2n-4}}, \quad |z|>0$$

6) Нека је $\alpha\in\mathbb{C}$. Функцију

$$f(z)=\frac{1+iz}{\alpha+z+\alpha z^2+z^3}$$ представити Лорановим развојем

у максималном прстену са центром у 0 у коме је то могуће.

$$f(z)=\frac{1+iz}{\alpha+z+\alpha z^2+z^3} = \frac{1+iz}{\alpha+z+z^2(\alpha+z)} = \frac{1+iz}{(1+z^2)(\alpha+z)} = \frac{i(z-i)}{(z-i)(z+i)(z+\alpha)}$$

f је аналитичка на $\mathbb{C}\setminus\{i,-i,-\alpha\}$

$A_{max} = \{z\in\mathbb{C} : |z| > \max\{1,|\alpha|\}\}$ максималан прстен

(На A_{max} је $\frac{|\alpha|}{|z|}<1$ и $|z|>1$, $\frac{1}{|z|}<1$)

$z+i = i(1-iz)$

$$f(z)=\frac{i}{(z+i)(z+\alpha)} = \frac{i}{i(1-iz)(z+\alpha)} = \frac{1}{(1-iz)(z+\alpha)}$$

Размотрићемо 2 случаја: $\alpha=i$ и $\alpha\neq i$

1) $\alpha=i$: $$f(z)=\frac{i}{(z+i)^2} = \frac{i}{z^2\left(1+\frac{i}{z}\right)^2} = \frac{i}{z^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\left(\frac{-i}{z}\right)^{n-1}$$ за $\frac{1}{|z|}<1$

$$f(z)=\frac{i}{z^2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-i)^{n-1}\cdot n}{z^{n-1}}, \quad |z|>1$$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot i^n\cdot n}{z^{n+1}}, \quad |z|>1$$

2) $\alpha \neq i$

$$f(z)=\frac{1}{(\alpha+z)(1-iz)}=\frac{A}{\alpha+z}+\frac{B}{1-iz} \quad /(\alpha+z)(1-iz)$$

$$1=A-Aiz+B\alpha+Bz$$

$$\left.\begin{aligned} B-Ai&=0\\ A+B\alpha&=1\end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} B&=A\cdot i\\ A+A\cdot i\cdot\alpha&=1\end{aligned} \qquad \begin{aligned} A&=\frac{1}{1+i\alpha}\\ B&=\frac{i}{1+i\alpha}\end{aligned}$$

$$f(z)=\frac{1}{1+i\alpha}\cdot\frac{1}{\alpha+z}+\frac{i}{1+i\alpha}\cdot\frac{1}{1-iz} \qquad \left.\begin{aligned} |z|&>1\\ |z|&>|\alpha|\end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \frac{1}{|z|}&<1\\ \frac{|\alpha|}{|z|}&<1\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{1+i\alpha}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{\alpha}{z}}+\frac{i}{1+i\alpha}\cdot\frac{1}{-iz}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{iz}}$$

$$=\frac{1}{1+i\alpha}\cdot\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\alpha}{z}\right)^n+\frac{-1}{1+i\alpha}\cdot\frac{1}{z}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{iz}\right)^n$$

$$=\frac{1}{1+i\alpha}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^n}{z^{n+1}}-\frac{1}{1+i\alpha}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{i^n z^{n+1}} \qquad \frac{1}{i}=-i$$

$$\frac{1}{i^n}=(-i)^n=(-1)^n i^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(\alpha^n-i^n)}{1+i\alpha}\cdot\frac{1}{z^{n+1}}, \quad |z|>\max\{1,|\alpha|\}$$

$(|z|>1 \text{ и } |z|>|\alpha|)$