① У прву банку је уложено 100€ на 4 године, при чему је прве две године камата 20% са годишњим обрачуном, док се за друге две године користи променљива каматна стопа $r(t)=\frac{2t}{t^2+8}$, $2 \le t \le 4$.
У другу банку је уложено 100€ на 4 године са каматом c и кварталним обрачуном. Након 4 године, новац добијен у обе банке је исти. Одредити c.

$$A(0)=100$$

$$A(2)=100\,(1+0{,}2)^2$$

$$A(4)=A(2)\cdot e^{\int_2^4 r(t)\,dt}$$ новац у првој банци након 4 године

Новац у другој банци након 4 године: $100\left(1+\frac{c}{4}\right)^{4\cdot 4}=A(4)$

$$100\cdot 1{,}2^2\cdot e^{\int_2^4 \frac{2t}{t^2+8}dt}=100\cdot\left(1+\frac{c}{4}\right)^{16}$$

$$1{,}44\cdot e^{\ln|t^2+8|\big|_2^4}=\left(1+\frac{c}{4}\right)^{16}$$

$$1{,}44\cdot e^{\ln 24-\ln 12}=\left(1+\frac{c}{4}\right)^{16}$$

$$1{,}44\, e^{\ln 2}=\left(1+\frac{c}{4}\right)^{16}$$

$$2\cdot 1{,}44=\left(1+\frac{c}{4}\right)^{16}$$

$$2{,}88=\left(1+\frac{c}{4}\right)^{16}$$

$$1+\frac{c}{4}=\sqrt[16]{2{,}88}$$

$$c=4\cdot\left(\sqrt[16]{2{,}88}-1\right)\approx 0{,}2734$$

$$\boxed{c\approx 27{,}34\%}$$

② У банку је уложено 5000 €. Након 4 месеца уложено је још 1000 €, а након 8 месеци још 4000 €. Укупна вредност улога након једне године је 10560 €. Познато је да банка користи промењиву каматну стопу $r(t) = \dfrac{m}{1+(1-t)m}$, $0 \le t \le 1$. Одредити m.

$A(1) = 10560$

4 месеца $= \frac{1}{3}$ године

8 месеци $= \frac{2}{3}$ године

$$5000 \cdot e^{\int_0^1 r(t)dt} + 1000 \cdot e^{\int_{\frac{1}{3}}^1 r(t)dt} + 4000 \cdot e^{\int_{\frac{2}{3}}^1 r(t)dt} = 10560 \qquad /:1000$$

$$\int r(t)dt = \int \frac{m}{1+(1-t)m} dt = \left(\begin{array}{l} \text{смена: } u = 1+(1-t)m \\ du = -m\,dt \end{array} \right)$$

$$= \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| + C = -\ln|1+(1-t)m| + C$$

$$\int_0^1 r(t)dt = -\ln|1+(1-t)m| \Big|_0^1 = \ln(1+m)$$

$$\int_{\frac{1}{3}}^1 r(t)dt = -\ln|1+(1-t)m| \Big|_{\frac{1}{3}}^1 = \ln\left(1+\tfrac{2}{3}m\right)$$

$$\int_{\frac{2}{3}}^1 r(t)dt = -\ln|1+(1-t)m| \Big|_{\frac{2}{3}}^1 = \ln\left(1+\tfrac{1}{3}m\right)$$

$$5 \cdot e^{\ln(1+m)} + e^{\ln(1+\frac{2}{3}m)} + 4 \cdot e^{\ln(1+\frac{1}{3}m)} = 10{,}56$$

$$5 \cdot (1+m) + 1 + \tfrac{2}{3}m + 4 \cdot \left(1+\tfrac{1}{3}m\right) = 10{,}56$$

$$10 + 5m + 2m = 10{,}56$$

$$7m = 0{,}56$$

$$\boxed{m = 0{,}08}$$

Обвезнице

Обвезница представља обавезу за оног ко је издао обвезницу да плаћа новац ономе ко поседује обвезницу у складу са правилима која су одређена у тренутку издавања обвезнице. На дан доспећа за обвезницу се исплаћује главница. Већина обвезница има периодичну, купонску исплату. Износ за купоне се описује у терминима процента од главнице.

Пример1: Обвезница са купонском стопом 7% од 1000€ доносиће се у купонима од 70€ сваке године. ($70 = 7\% \cdot 1000$)

Период између 2 купона обично је 6 месеци када се исплаћује половина купонске суме, овде 35€.

У неком одређеном тренутку исплате купона, обвезница се може откупити од власника по назначеној цени. У вези са тим постоји још један појам – нагомилана камата (S) која се мора платити када се обвезница купује у средини купонског периода.

Нпр. ако се обвезница купује на средини купонског периода од 6 месеци, купац ће добити купонску исплату после 3 месеца.

Нови власник мора да плати нагомилану камату као додатак на цену.

$$S = \frac{\text{број дана од последњег купона}}{\text{укупан број дана у тренутном купонском периоду}} \cdot \text{износ купона}$$

Пример2: Дана 8. маја је купљена обвезница са назначеном ценом 1000€ која доспева 15. августа неке будуће године. Ако је купонска стопа 9%, а купони се исплаћују сваког 15. фебруара и 15. августа, одредити колика је нагомилана камата, ако је у питању преступна година.

$$S = \frac{83}{182} \cdot 45 = 20{,}52\,€$$

$$\text{износ купона} = \frac{0{,}09 \cdot 1000}{2} = 45€$$

укупан број дана у купонском периоду $= \underset{\text{фебр.}}{(29-15)} + \underset{\text{март}}{31} + \underset{\text{апр.}}{30} + \underset{\text{мај}}{31} + \underset{\text{јун}}{30} + \underset{\text{јул}}{31} + \underset{\text{авг.}}{15} = 182$

број дана од последњег купона = од 15. фебр. до 8. маја $= 14 + 31 + 30 + 8 = 83$

F - назначена вредност на обвезнице

R - откупна вредност обвезнице

($R=F$ осим ако није другачије наглашено)

m - број купонских исплата у току једне године $\rightarrow$ купонски период $\frac{1}{m}$

r - купонска стопа обвезнице

P - вредност обвезнице у садашњем тренутку

n - број купонских периода до доспећа обвезнице

λ - добит до доспећа која се обрачунава k пута годишње (λ је каматна стопа)

t - време до доспећа обвезнице

$$t = n\cdot\frac{1}{m} = \frac{n}{m}\ ,\ n = t\cdot m$$

вредност једне купонске исплате је $F\cdot r\cdot\frac{1}{m} = \frac{F\cdot r}{m}$

почетна вредност j-те купонске исплате је $\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{-k\cdot\frac{j}{m}}\cdot\frac{F\cdot r}{m}$

$$P = \underbrace{\frac{R}{\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{kt}}}_{\text{почетна вредност откупне вредности обвезнице}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n}\frac{\frac{F\cdot r}{m}}{\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{k\cdot\frac{j}{m}}}}_{\text{сума почетних вредности свих } n \text{ исплата}}$$

вредност обвезнице

$0 \quad \frac{1}{m} \quad \frac{2}{m} \quad \frac{3}{m} \quad \cdots \quad t=\frac{n}{m}$

$$P = \frac{R}{\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{kt}} + \frac{F\cdot r}{m}\cdot\sum_{j=1}^{n}\Bigg(\underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{\frac{k}{m}}}}_{a}\Bigg)^{j}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a^j = a + a^2 + \ldots + a^n = a\cdot(1+a+\ldots+a^{n-1}) = a\cdot\frac{1-a^n}{1-a}$$

$$P = \frac{R}{\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{kt}} + \frac{F\cdot r}{m}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{\frac{k}{m}}}\cdot\frac{1}{1-\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{-\frac{k}{m}}}\cdot\left(1-\left(\frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{\frac{k}{m}}}\right)^{n}\right)$$

$$P = \frac{R}{\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{kt}} + \frac{F\cdot r}{m}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{\frac{k}{m}}-1}\cdot\left(1-\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{-k\frac{n}{m}}\right)\quad,\ t=\frac{n}{m}$$

$$\boxed{P = \frac{R}{\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{kt}} + \frac{F\cdot r}{m}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{\frac{k}{m}}-1}\cdot\left(1-\left(1+\frac{\lambda}{k}\right)^{-kt}\right)}$$

ОСНОВНА ФОРМУЛА РАЧУНА СА ОБВЕЗНИЦАМА