(8) Развити функцију $\operatorname{sh} z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$ у Тејлоров ред у диску са центром $z_0 = i$.

$f(z) = \operatorname{sh} z$ је холоморфна на $\mathbb{C}$, па се може развити на целом $\mathbb{C}$, (тј. полупречник диска је ∞)

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-i)^n$$

$$e^{i} = e^{0+1\cdot i}$$
$$e^{i} = \cos 1 + i\sin 1$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}\left(e^{z} - e^{-z}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{z-i+i} - e^{-(z-i)-i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(e^{i}\cdot e^{z-i} - e^{-i}\cdot e^{-(z-i)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n!} - e^{-i}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n (z-i)^n}{n!}\right)$$

оба конвергирају $\forall z \in \mathbb{C}$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\left(e^{i} - (-1)^n e^{-i}\right)\frac{(z-i)^n}{n!}$$

Теорема јединости (већ смо је формулисали): ↗ у мало другачијем облику, али еквивалентно је

Нека је Ω област у $\mathbb{C}$ и $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ различитих тачака из Ω који конвергира у Ω. Ако су фје f и g холоморфне у области Ω и $f(z_n)=g(z_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$, тада је $f=g$ у Ω.

① Да ли постоји цела фја f, таква да је $f(\frac{1}{n})=f(\frac{-1}{n})=\frac{1}{n^5}$ $\forall n\in\mathbb{N}$?
А да ли постоји цела фја f, таква да је $f(\frac{1}{n})=f(\frac{-1}{n})=\frac{1}{n^6}$ $\forall n\in\mathbb{N}$?

пп. да постоји фја f тд. $f(\frac{1}{n})=f(\frac{-1}{n})=\frac{1}{n^5}$

$\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ је низ у $\mathbb{C}$ који конвергира ка $0\in\mathbb{C}$

фје f и z^5 се поклапају на низу $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$

$\underset{\text{Т. јединости}}{\Longrightarrow}$ $f(z)=z^5$, $\forall z\in\mathbb{C}$

Али, $f(-\frac{1}{n})=(\frac{-1}{n})^5=\frac{-1}{n^5}\neq\frac{1}{n^5}$, па није могуће да важи $f(\frac{-1}{n})=\frac{1}{n^5}=f(\frac{1}{n})$.

Дакле, тражено f не постоји.

За други део задатка: $f(z)=z^6$ је цела фја и задовољава тражено.

② Да ли постоји цела фја f тд. је $f(\frac{1}{n})=\frac{n}{2+n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$?

$$f(\tfrac{1}{n})=\frac{n}{2+n}=\frac{1}{\frac{2}{n}+1}=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{n}+1}$$

Нека је $g(z)=\frac{1}{2z+1}$. Тада је $g(\frac{1}{n})=\frac{1}{2\cdot\frac{1}{n}+1}=f(\frac{1}{n})$.

фја g је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{1}{2}\}=\Omega$.

$\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$ је низ у Ω који конвергира у Ω

$\underset{\text{Т.Ј.}}{\Longrightarrow}$ $f=g$ у Ω. Дакле, $f(z)=\frac{1}{2z+1}$ $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{-\frac{1}{2}\}$

$f(z) = \frac{1}{2z+1} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$

f је непрекидна на $\mathbb{C}$ јер је холоморфна на $\mathbb{C}$ (тражи се цела)

$\Rightarrow f(-\frac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} f(-\frac{1}{2}+\frac{1}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{-1+\frac{2}{n}+1} = \infty$, па је то немогуће јер цела ф-ја има кодомен $\mathbb{C}$ $(f : \mathbb{C} \to \mathbb{C})$

$\Rightarrow$ тражена ф-ја f не постоји

③ а) Доказати да не постоји холоморфна функција $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ тд. важи

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

б) Доказати да не постоји холоморфна функција $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ тд. важи

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{(-1)^n}{n^2}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

а) • пп. постоји тражена ф-ја f

• низ $\left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира у $\mathbb{D}$

• $g(z) = 1_{\mathbb{D}}(z)$ (идентитета)

$f\left(\frac{1}{2n}\right) = 1_{\mathbb{D}}\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n}$

f и g се поклапају на $\left\{\frac{1}{2n}\right\}_{n=1}^{\infty}$

$\underset{\text{T.J.}}{\Longrightarrow} \quad f = g$ на $\mathbb{D} \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1} \neq \frac{1}{2n}$ ↯ са условом

б) пп. постоји тражена ф-ја f

$$f\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{(-1)^n}{n^2} \Rightarrow f\left(\frac{1}{4n}\right) = \frac{(-1)^{2n}}{(2n)^2} = \frac{1}{4n^2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{4n}\right)^2$$

$$\left.\begin{array}{l} g(z) = 4z^2 \text{ холоморфна на } \mathbb{D} \\ \left\{\frac{1}{4n}\right\}_{n=1}^{\infty} \text{ низ конвергира у } \mathbb{D} \\ f\left(\frac{1}{4n}\right) = g\left(\frac{1}{4n}\right), \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right\} \underset{\text{T.J.}}{\Longrightarrow} f = g \text{ на } \mathbb{D}$$

$f\left(\frac{1}{2n}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2n}\right)^2 = \frac{1}{n^2} \neq \frac{(-1)^n}{n^2}$

$\Rightarrow \nexists$ не постоји f!

(4) Наћи све целе ф-је f за које је $f'(1-\frac{1}{n}) = f''(1-\frac{1}{n})$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(0)=3$ и $f'(0)=1$.

f цела $\Rightarrow f'$ и f'' су целе

$z_n = 1-\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

$\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ низ у $\mathbb{C}$ који конвергира у $\mathbb{C}$

$f'(z_n) = f''(z_n)$

$\underset{\text{T.J.}}{\Rightarrow}$ $f'(z) = f''(z)$ $\forall z\in\mathbb{C}$

f аналитичка на $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z\in\mathbb{C}$

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot z^{n-1}, z\in\mathbb{C}$$

$$f''(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}, z\in\mathbb{C}$$

$$f'(z) = f''(z) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2} z^n \quad \forall z\in\mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \cancel{(n+1)}\, a_{n+1} = (n+2)\cancel{(n+1)}\, a_{n+2}$$

$$a_{n+1} = (n+2)\, a_{n+2}$$

$$\boxed{a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{n+2} \quad \forall n\in\mathbb{N}_0}$$

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n} = \frac{1}{n}\cdot\frac{a_{n-2}}{n-1} = \frac{1}{n(n-1)}\cdot\frac{a_{n-3}}{n-2} = \dots = \frac{1}{n!}\cdot a_1$$

$a_0, a_1 \in\mathbb{C}$ произвољни

$$f(z) = a_0 + a_1\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = a_0 + a_1(e^z - 1),\ z\in\mathbb{C}$$

$f(0) = a_0 + a_1\cdot(e^0-1) = a_0 = 3$

$f'(0) = a_1 e^0 = a_1 = 1$

$\Rightarrow f(z) = 3 + e^z - 1$

$$\boxed{f(z) = e^z + 2}$$

(4) Наћи све целе ф-је f за које је $f'(1-\frac{1}{n})=f''(1-\frac{1}{n})$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $f(0)=3$ и $f'(0)=1$.

f цела $\Rightarrow f'$ и f'' су целе

$$\left.\begin{array}{l} z_n=1-\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \\ \{z_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ низ у } \mathbb{C} \text{ који конвергира у } \mathbb{C} \\ f'(z_n)=f''(z_n) \end{array}\right\} \underset{\text{Т.Ј.}}{\Rightarrow} f'(z)=f''(z) \quad \forall z\in\mathbb{C}$$

f аналитичка на $\mathbb{C} \Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $z\in\mathbb{C}$

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot z^{n-1}, z\in\mathbb{C}$$

$$f''(z)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}, z\in\mathbb{C}$$

$$f'(z)=f''(z) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n z^{n-2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1} z^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2} z^n \quad \forall z\in\mathbb{C}$$

$$\Rightarrow \cancel{(n+1)}\, a_{n+1}=(n+2)\cancel{(n+1)}\, a_{n+2}$$

$$a_{n+1}=(n+2)\, a_{n+2}$$

$$\boxed{a_{n+2}=\frac{a_{n+1}}{n+2} \quad \forall n\in\mathbb{N}_0}$$

$$a_n=\frac{a_{n-1}}{n}=\frac{1}{n}\cdot\frac{a_{n-2}}{n-1}=\frac{1}{n(n-1)}\cdot\frac{a_{n-3}}{n-2}=\dots=\frac{1}{n!}\cdot a_1$$

$a_0, a_1\in\mathbb{C}$ произвољни

$$f(z)=a_0+a_1\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=a_0+a_1(e^z-1), z\in\mathbb{C}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=a_0+a_1\cdot(e^0-1)=a_0=3 \\ f'(0)=a_1 e^0=a_1=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(z)=3+e^z-1$$

$$\boxed{f(z)=e^z+2}$$

5 Одредити све холоморфне фје f на $\mathbb{C}$ тд је $f(2z)=f(3z)$ $\forall z\in\mathbb{C}$ и $f(0)=6$.

Посматрајмо низ $z_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$f(z_2)=f\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)=f\left(2\cdot\frac{2}{3^2}\right)=f\left(3\cdot\frac{2}{3^2}\right)=f\left(\frac{2}{3}\right)=f(z_1)$$

$$f(z_{n+1})=f\left(2\cdot\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)=f\left(3\cdot\frac{2^n}{3^{n+1}}\right)=f\left(\frac{2^n}{3^n}\right)=f(z_n)\quad\forall n\in\mathbb{N}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right)=f\left(2\cdot\frac{1}{3}\right)=f\left(3\cdot\frac{1}{3}\right)=f(1)$$

$f(1)=c$ $\quad f(z_n)=c$ $\forall n\in\mathbb{N}$, $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ има лимес у $\mathbb{C}$

$\underset{\text{ТЈ.}}{\Rightarrow}$ $\boxed{f(z)=c \quad \forall z\in\mathbb{C}}$

$c=6$ јер је $f(0)=6$

$$\boxed{f(z)=6 \quad \forall z\in\mathbb{C}}$$