Тејлоров развој

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ степени ред у $\mathbb{C}$, $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ низ у $\mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$

полупречник конвергенције: $R = \dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}$ (важи: $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ ако $\exists \lim$)

- ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ апсолутно конвергира у диску $D(z_0,R)$ $(R>0)$ равн. конв. у $\overline{D}(z_0,r)$, где је $r<R$ $(r>0)$, дивергира за $|z-z_0|>R$.

(T1) Ако $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ конвергира за све $z \in D(z_0,R)$ $(R>0)$, тада је f холоморфна у $D(z_0,R)$ и важи:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, a_n (z-z_0)^{n-k}$$ за све $k \in \mathbb{N}$, $z \in D(z_0,R)$.

Специјално, важи: $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

(T2) (обрат T1) (Тејлоров развој)

Нека је функција f холоморфна у $D(z_0,R)$.

Тада важи: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$, $\forall z \in D(z_0,R)$

где је $a_n = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\gamma_r} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz$ $\forall n \in \mathbb{N}_0$, где је γ позитивно оријентисана кр. са центром z_0 полупречника $r \in (0,R)$.

* Ако је f цела ф-ја, онда се представља Т.р. на целом $\mathbb{C}$.

Нпр. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{за } z \in \mathbb{D}$$

① Одредити диск конвергенције и испитати конвергенцију на рубу диска к. за следеће степене редове:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$

а) $R=1$

$z_0=0$

$D(z_0,R)=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}=\mathbb{D}$ диск конв.

за $z=e^{it}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{int} = \sum_{n=0}^{\infty} \cos nt + i\cdot\sum_{n=0}^{\infty} \sin nt$$

дивергира (општи члан не тежи 0)

б) $R=1$

$z_0=0$

$\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}=D(z_0,R)$

диск конвергенције

за $z=e^{it}$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nt}{n} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$$

конвергирају оба

(Дирихлеов кр.)

в) $R=\dfrac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}}}=1$

$z_0=0$

$D(z_0,R)=\mathbb{D}$

за $z=e^{it}$: $\left|\frac{z^n}{n^2}\right| \le \frac{|z|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ конв.

$\Rightarrow \sum_{n=1} \frac{z^n}{n^2}$ конвергира и на $\partial\mathbb{D}$

тј. за $|z|=1$

г) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ $z_0=0$

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=\infty$

$D(z_0,R)=\mathbb{C}$

② Функцију $f(z)=\sin(2z+1)$ представити Тејлоровим редом у диску са центром -1.

f је холоморфна на $\mathbb{C}$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(-1)}{n!}\,(z-(-1))^n$$

$f'(z)=\cos(2z+1)\cdot 2$

$f''(z)=-\sin(2z+1)\cdot 2^2$

$f'''(z)=-\cos(2z+1)\cdot 2^3$

$f^{(4)}(z)=\sin(2z+1)\cdot 2^4$

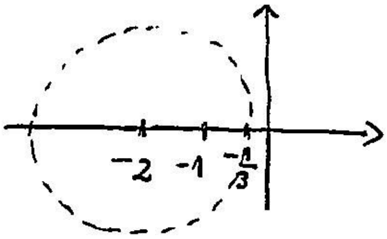
$f^{(n)}(z)=\sin(2z+1+n\frac{\pi}{2})\cdot 2^n$

$$\left(\sin(x+n\tfrac{\pi}{2})=\sin x\cdot\cos(\tfrac{n\pi}{2})+\cos x\cdot\sin\tfrac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases}(-1)^k\sin x, & n=2k\\ (-1)^k\cos x, & n=2k+1\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\left(-1+n\frac{\pi}{2}\right)\cdot 2^n}{n!}(z+1)^n,\quad z\in\mathbb{C}\qquad (\mathbb{C}=D(-1,\infty))$$

③ Функцију $f(z)=\frac{1}{3z+1}$ представити Тејлоровим редом у диску са центром -2.

f је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\{-\frac{1}{3}\}$



$\Rightarrow$ полупречник диска може бити највише $1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$

$$D(z_0,R)=D\left(-2,\frac{5}{3}\right)$$

хоћемо
$$\begin{cases} f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(-2)}{n!}\cdot(z+2)^n \\ \text{за } |z+2|<\frac{5}{3}\end{cases}$$

За развој ћемо користити сада познате развоје (прва страница) уместо да рачунамо изводе

$$f(z)=\frac{1}{3z+1}=\frac{1}{3(z+2)-5}=\frac{1}{-5\cdot\left(1-\frac{3}{5}(z+2)\right)}$$

$$=\frac{-1}{5}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}(z+2)\right)^n \quad \text{за } \frac{3}{5}|z+2|<1$$

тј. $|z+2|<\frac{5}{3}$

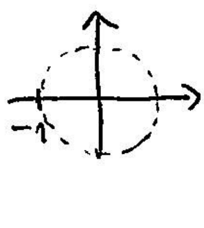
$$\frac{1}{1-w}=\sum_{n=0}^{\infty}w^n,\ |w|<1$$

$$=\frac{-1}{5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{5^n}\cdot(z+2)^n,\quad \text{за } |z+2|<\frac{5}{3}$$

$$a_n=\frac{-3^n}{5^{n+1}}$$

④ Функцију $f(z)=\frac{2}{(1+z)^3}$ представити Тејлоровим редом у диску са центром 0.

f је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$.



$\Rightarrow$ полупречник диска је највише 1

$$D(z_0,R)=D(0,1)=\mathbb{D}$$

$$f(z)=\frac{2}{(1+z)^3}\qquad g(z)=\frac{1}{1+z}\qquad g'(z)=\frac{-1}{(1+z)^2}\qquad g''(z)=\frac{2}{(1+z)^3}$$

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \quad, |z|<1$$

$$g'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n\cdot z^{n-1} \quad, |z|<1$$

$$g''(z)=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\cdot n\cdot(n-1)\, z^{n-2} \quad, |z|<1 \quad \Rightarrow \quad f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+2}\cdot(k+2)(k+1)\, z^k \quad, |z|<1$$

$$(k+2=n)$$

⑤ функцију $f(z)=e^z\cdot \sin z$ представити Тејлоровим редом у диску са центром 0.

f је холоморфна на $\mathbb{C}$ $\Rightarrow$ диск ће бити $\mathbb{C}$

$$f(z)=e^z\cdot\sin z=e^z\cdot\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{1}{2i}\cdot\left(e^{z(1+i)}-e^{z(1-i)}\right)$$

$$=\frac{1}{2i}\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n(1+i)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n(1-i)^n}{n!}\right)$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n\left((1+i)^n-(1-i)^n\right)}{2i\, n!} \quad, z\in\mathbb{C}$$

⑥ функцију $f(z)=\dfrac{1}{z^2+z+1}$ представити Тејлоровим редом у диску са центром 0.

$$z^2+z+1=0$$

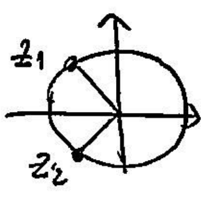
$$(z-1)(z^2+z+1)=0 \quad, z\neq 1$$

$$z^3-1=0 \Rightarrow z^3=1 \qquad z_k=e^{i\frac{2k\pi}{3}} \qquad z_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}, z_2=e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$k\neq 0$

$k\in\{1,2\}$

$$(z-z_1)(z-z_2)=1+z+z^2$$



f је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\{z_1,z_2\}$

$\Rightarrow$ можемо је развити на диску полупречника 1 (на $\mathbb{D}$)

$$\frac{1}{z^2+z+1}=\frac{A}{z-z_1}+\frac{B}{z-z_2} \qquad /(z-z_1)(z-z_2)$$

$$1=A(z-z_2)+B(z-z_1)$$

$$1 = (A+B)z - Az_2 - Bz_1$$

$$e^{i\frac{2\pi}{3}} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \\ Az_2+Bz_1=-1 \end{array}\right\} \qquad B=-A \qquad A(z_2-z_1)=-1$$

$$e^{i\frac{4\pi}{3}} = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} \qquad \cos\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{4\pi}{3}$$

$$\sin\frac{2\pi}{3} = -\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$A = \frac{-1}{z_2-z_1} = \frac{-1}{e^{i\frac{4\pi}{3}} - e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{-1}{-2i\sin\frac{2\pi}{3}} = \frac{1}{2i\sin\frac{2\pi}{3}}$$

$$B = \frac{-1}{2i\sin\frac{2\pi}{3}} \quad , \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{i\sqrt{3}} \cdot \frac{i}{i} = \frac{-i}{\sqrt{3}} \quad , B = \frac{i}{\sqrt{3}}$$

$$e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$$

$$f(z) = \frac{-i}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{z-e^{i\frac{2\pi}{3}}} + \frac{i}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{z-e^{i\frac{4\pi}{3}}}$$

$$= \frac{i}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{e^{i\frac{2\pi}{3}}\left(1-ze^{-i\frac{2\pi}{3}}\right)} - \frac{i}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{e^{i\frac{4\pi}{3}}\left(1-ze^{-i\frac{4\pi}{3}}\right)}$$

$$= \frac{i}{\sqrt{3}\, e^{i\frac{2\pi}{3}}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n e^{-i\frac{n2\pi}{3}} - \frac{i}{\sqrt{3}e^{-i\frac{2\pi}{3}}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} z^n \underbrace{e^{-i\frac{4n\pi}{3}}}_{e^{i\frac{n2\pi}{3}}} \quad , |z|<1$$

$$= \frac{i}{\sqrt{3}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-i\cdot\frac{2n\pi+2\pi}{3}} - e^{i\cdot\frac{2n\pi+2\pi}{3}}\right) \cdot z^n \right) , |z|<1$$

$$= \frac{i}{\sqrt{3}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-i\frac{2(n+1)\pi}{3}} - e^{i\cdot\frac{2(n+1)\pi}{3}}\right) z^n , |z|<1$$

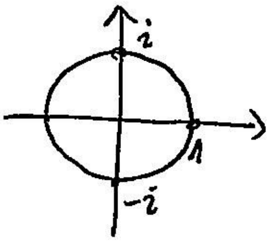
$$= \frac{i\sqrt{3}}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-2i\sin\frac{2(n+1)\pi}{3}\right) \cdot z^n \quad , |z|<1$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sin\frac{2(n+1)\pi}{3} \cdot z^n \quad , |z|<1$$

⑦ Домаћи: функцију $f(z)=\dfrac{z^3}{(1+z^2)(z-1)}$ представити Тејлоровим редом у диску са центром 0.

f је холоморфна на $\mathbb{C}\setminus\{1, i, -i\}$

$\Rightarrow$ највећи диск са центром у 0 на коме је могуће развити је $D(0,1)=\mathbb{D}$.



$$\frac{1}{(1+z^2)(z-1)}=\frac{A}{z-i}+\frac{B}{z+i}+\frac{C}{z-1}$$ нађите A, B, C

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{z-i}&=\frac{1}{-i\left(1-\frac{z}{i}\right)}=i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^n}\\
\frac{1}{z+i}&=\frac{1}{i\left(1+\frac{z}{i}\right)}=-i\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n(-1)^n}{i^n}\\
\frac{1}{z-1}&=\frac{-1}{1-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n
\end{aligned}\right\}\quad |z|<1$$

$$f(z)=z^3\cdot\left(A\cdot i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{i^n}+B\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-i\cdot z^n(-1)^n}{i^n}+C\cdot(-1)\sum_{n=0}^{\infty}z^n\right)$$

...