Celobrojno programiranje

Rešavamo sledeći poblem celobrojnog programiranja:

$$\min c^T x$$
$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$
$$x \in Z^n$$

Gde pretpostavljamo da je A celobrojna matrica dimenzije $m \times n$, $b \in Z^m, c \in Z^n$. Takođe, očekuje se da su koordinate x celobrojne. U slučaju da se zahteva celobronost samo nekih koordinata, govorimo o problemu *mešovitog celobrojnog linearnog* programiranja.

Naredni časovi posvećeni su sledećim problemima:

- Transporni problem
- Problem raspoređivanja (asignacije)
- Problem ranca (formula unapred/unazad, ranac na grupi)
- Gomorijev rez, Metod granjanja i odsecanja
- Implicitno prebrojavanje, itd.

DEFINICIJA

Za celobrojnu kvadratnu matricu **V** kažemo da je *unimodularna*ako je $detV \in \{1, -1\}$. Ako je V unimodularna matrica, tada je V^{-1} takođe unimodularna, obzirom da je $V^{-1} = \frac{adjV}{detV}$ celobrojna matrica i $\det V^{-1} = \frac{1}{detV} \in \{1, -1\}$.

TEOREMA

Ako je matrica $A = [a_{ij}]_{m,n}$ celobrojna matrica ranga $r > 0$ onda postoje takve unimodularne matrice U i V da je

$$UAV = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & & & & 0 \\ 0 & & \dots & & & 0 \\ \dots & & & d_r & & \dots \\ 0 & & & & & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

pri čemu su $d_1, d_2, .., d_r$ prirodni brojevi takvi da d_i deli d_{i+1} a $i = 1, .., r - 1$.
Dijagonalna matrica koja ima osobine iskazane teoremom, ima Smith-ovu formu.

PRIMER 57

Rešiti sistem celobrojnih jednačina:

$$5x + 4y + 9z = 1$$
$$4x + 2y + 6z = 2$$

Rešenje:

Matricu sistema $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 9 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ transformišemo elementarnim transformacijama u Smith-ov normalni oblik D.

U cilju istovromenog određivanja unimodularnih matrica U i V tako da je $UAV = D$ stavimo kao početne vrednosti

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ i } V = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i sve transformacije **nad vrstama** ponovimo na tekućoj matrici U dok sve transformacije **nad kolonama** ponovimo na tekućoj matrici V. Kada matrica A bude dovedena na Smith-ov oblik ($A_{novo} = UAV = D$) matrice U i V dobiće svoju pravu vrednost. Obeležimo kolone matrice A sa k_1, k_2 i k_3, odnosno vrste sa v_1 i v_2. Nove vrednosti su nadvučene.

U		A			V			
1	0	5	4	9	1	0	0	rotiramo kolone k_1 i k_2
0	1	4	2	6	0	1	0	$\overline{k_1} = k_2$
					0	0	1	$\overline{k_2} = k_1$
1	0	4	5	9	0	1	0	rotiramo vrste v_1 i v_2
0	1	2	4	6	1	0	0	$\overline{v_1} = v_2$
					0	0	1	$\overline{v_2} = v_1$
0	1	2	4	6	1	0	0	$\overline{k_2} = k_2 - 2k_1$
1	0	4	5	9	0	1	0	$\overline{k_3} = k_3 - 3k_1$
					0	0	1	
0	1	2	0	0	0	1	0	
1	0	4	-3	-3	1	-2	-3	$\overline{v_2} = v_2 - 2v_1$
					0	0	1	
0	1	2	0	0	0	1	0	$\overline{k_2} = -k_2$
1	-2	0	-3	-3	1	-2	-3	$\overline{k_3} = k_3 - k_2$
					0	0	1	
0	1	2	0	0	0	-1	-1	
1	-2	0	3	0	1	2	-1	$\overline{k_2} = k_2 + k_1$
					0	0	1	
0	1	2	2	0	0	-1	-1	
1	-2	0	3	0	1	3	-1	$\overline{v_2} = v_2 - v_1$
					0	0	1	
0	1	2	2	0	0	-1	-1	$\overline{v_2} = v_1$
1	-3	-2	1	0	1	3	-1	$\overline{v_1} = v_2$
					0	0	1	
1	-3	-2	1	0	0	-1	-1	$\overline{k_1} = k_2$
0	1	2	2	0	1	3	-1	$\overline{k_2} = k_1$
					0	0	1	
1	-3	1	-2	0	-1	0	-1	
0	1	2	2	0	3	1	-1	$\overline{k_2} = k_2 + 2k_1$
					0	0	1	

1	-3
0	1

1	0	0
2	6	0

-1	-2	-1
3	7	-1
0	0	1

$\overline{v_2} = v_2 + 2v_1$

1	-3
-2	7

1	0	0
0	6	0

-1	-2	-1
3	7	-1
0	0	1

Opisanim postupkom dobijamo matrice $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Kako je polazni sistem oblika $AX = b$, množenjem sa matricom U sa leve strane, dobijamo relaciju $UAX = Ub$.

Uvodimo smenu promenljive $X = VY$. Na ovaj način dobijamo $UAVY = Ub$. Neka je sada $UAV = D$.

Rešavamo sisteme $DY = Ub$ i $X = VY$.

Neka je, npr. $Y = [a \quad b \quad c]^T$.

$$DY = Ub \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$X = VY \quad \leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Iz prvog sistema sledi da je $a = -5, b = 2, c \in Z$.

Zamenom u drugi sistem, nalazimo da je $x = 1 - c, y = -1 - c, z = c, c \in Z$.

PRIMER 58

Dovesti na Smith-ov oblik matricu:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 5 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

Rešenje:

Analogno prethodnom zadatku formiramo matricu $D = UAV$.

U	
1	0
0	1

A		
4	-4	3
5	-7	6

V		
1	**0**	0
0	**1**	0
0	**0**	1

$\overline{k_1} = k_2$
$\overline{k_2} = k_1$

1	0
0	1

3	-4	4
6	-7	5

0	0	1
0	1	0
1	0	0

$\overline{k_2} = 2k_1 + k_2$
$\overline{k_3} = k_3 - k_1$

1	0
0	1

3	2	1
6	5	-1

0	**0**	1
0	**1**	0
1	**2**	-1

$\overline{k_1} = k_3$
$\overline{k_3} = k_1$

1	0
0	**1**

1	2	3
-1	5	6

1	0	0
0	1	0
-1	2	1

$\overline{k_2} = k_2 - 2k_1$
$\overline{k_3} = k_3 - 3k_1$

1	0
0	1

1	0	0
-1	7	9

1	-2	**-3**
0	1	**0**
-1	4	**4**

$\overline{v_2} = v_2 + v_1$

1	0
1	1

1	0	0
0	7	9

1	-2	**-3**
0	1	**0**
-1	4	**4**

$\overline{k_3} = k_3 - k_2$

1	0
1	1

1	0	0
0	7	2

1	-2	-1
0	1	-1
-1	4	0

$\overline{k_2} = k_3$
$\overline{k_3} = k_2$

1	0
1	1

1	0	0
0	2	7

1	-1	-2
0	-1	1
-1	0	4

$\overline{k_3} = k_3 - 3k_2$

1	0
1	1

1	0	0
0	2	1

1	**-1**	1
0	**-1**	4
-1	**0**	4

$\overline{k_2} = k_3$
$\overline{k_3} = k_2$

1	0
1	1

1	0	0
0	1	2

1	**1**	-1
0	**4**	-1
-1	**4**	0

$\overline{k_3} = k_3 - 2k_2$

1	0
1	1

1	0	0
0	1	0

1	**1**	-3
0	**4**	-9
-1	**4**	-8

Provera: $UAV = D$ (za svaki slučaj, nije obavezna)
Rešavamo sistem:

$$4x - 4y + 3z = \alpha$$
$$5x - 7y + 6z = \beta$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} 4 & -4 & 3 \\ 5 & -7 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Analogno prethodnom zadatku rešavamo sisteme $DY = Ub$ i $X = VY$.
Uvodimo smenu promenljivih $Y = [a \quad b \quad c]^T$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -9 \\ -1 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

odnosno, $a = \alpha, b = \alpha + \beta, z = c \in Z$
Za svako $\alpha, \beta \in Z$ sistem

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & -9 \\ -1 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \\ c \end{bmatrix}$$

ima rešenje i to su sva rešenja.

Problem ranca

Problem ranca definišemo na sledeći način:

Pretpostavimo da je dat neki ranac zapremine $b \geq 0$ i skup predmeta kojima se ranac puni. Svaki predmet ima svoju zapreminu $a_j \geq 0$ i vrednost $c_j \geq 0$. Napuniti ranac sadržajem najveće vrednosti tako da je ukupna vrednost koja se nosi u rancu maksimalna:

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \in Z$$

- Problem se ekvivalentno može posmatrati kao problem određivanja maksimalnog profita kompanije koja treba da finansira n projekata iz svog budžeta veličine b ako su poznazi troškovi i dobit za svaki projekat. Tada bi promenljiva x_j mogla da se interpetira kao promenljiva odlučivanja kojom se određuje procenat učešća kompanije u tom projektu.
- Problem ranca se rešava tako što se podeli na etape.
- Uvodimo pomoćnu funkciju F definisanu na sledeći način:

$$F_k(y) = \max\{c_1x_1 + \cdots + c_kx_k \mid a_1x_1 + \cdots + a_kx_k \leq y, x_1, .., x_k \geq 0, x_1, \ldots, x_k \in Z\}$$

<u>Za rešavanje pomoćne funkcije koristimo sledeće rekurentne formule:</u>

1. $F_1(y) = c_1[y/a_1]$
   $F_k\ (y) = \max\{c_kx_k + F_{k-1}(y - a_kx_k) \mid x_k \in \{0,1, \ldots, [y/a_k]\}\} \quad k \geq 2$

   Ako punimo ranac jednim predmetom sledi da je

$$F_1(y) = \max\{c_1x_1 \mid a_1x_1 \leq y, x_1 \geq 0\} = c_1[y/a_1]$$

   čime smo potvrdili početni uslov.

2. $F_k\ (y) = \max\{F_{k-1}(y), F_{k-1}(y - a_k) + c_k\}$ gde je $F_n(y) = -\infty$ za $y < 0$.

   U ovom slučaju za k-tu koordinatu optimalnog rešenja važi ili $x_k = 0$ $(F_k\ (y) = F_{k-1}\ (y)$ ili $x_k \geq 1$ $(F_k(y) = F_{k-1}\ (y - a_k\ ) + c_k)$. Optimalna vrednost je svakako uvek jednaka boljoj od navedenih vrednosti.

   Navedena formula se naziva još <u>*formulom unapred*</u> i ona je najpogodnija za kompjutersko izračunavanje.

   $F_n\ (y) = 0$ za $0 \leq y \leq \min\{a_1, \ldots, a_n\}$ a za $y \geq \min\{a_1, \ldots, a_n\}$ je
   $F_n(y) = \max\{c_k + F_n(y - a_k) \mid k = 1,2, .., n\}$ ukoliko se definiše $F_n(y) = -\infty$ za $y < 0$.

   Ako nula nije optimalno rešenje, bar jedna njegova koordinata, npr. x_k je veća ili jednaka od 1 $(F_n(y) = c_k + F_n(y - a_k))$.

- Navedene rekurzivne forumle se mogu koristiti za određivanje optimalne vrednosti $F_n\ (b)$ problema kao i odgovarajućeg optimalnog rešenja.
- Ako koristimo formulu 1 potrebno je da se pamte svi koraci dok je kod formule 2 dovoljno da se pamte samo poslednja dva rešenja.

- Kod druge formule uvodimo još jednu pomoćnu veličinu $i_k(y)$ koja pamti najveći indeks *j* takav da je *j*-ta promenljiva optimalnog rešenja u $F_k(y)$ pozitivna. Ukoliko je nula optimalno rešenje, definišimo ovaj indeks sa nulom. Važi rekurzija:

$$i_k(y) = \begin{cases} i_{k-1}(y) & c_k + F_k(y) < F_{k-1} \\ k & c_k + F_k(y) \geq F_{k-1} \end{cases}, \quad i_1(y) = \begin{cases} 0 & F_1(y) = 0 \\ 1 & F_1(y) \neq 0 \end{cases}$$

Na osnovu vrednosti dobijene za $i_n(y)$ možemo rekonstruišemo optimalno rešenje iz smisla indeksa i vrednosti $i_n(b)$ i $i_n(b - a_{i_n(b)})$.

Kako upisujemo rešenja?

$$i_n(y) = \begin{cases} k & x_n = 1, n = k \\ \neq k & x_n = 0, n \neq k \end{cases}$$

$$i_n\left(y - a_{i_n(b)}\right) = \begin{cases} k & x_k \geq a_{i_n(b)}, ispitujemo\ za\ y - a_{i_n(b)} \\ e & x_e = 1, x_{e+1} = 0, x_k = 1 \end{cases}$$

PRIMER 59

Rešiti problem ranca koristeći rekurentnu formulu unapred.

$$\max\ 10x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4$$
$$3x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 4$$
$$x_i \in [0,1], i = 1,2,3,4.$$

Rešenje:

Prvo odredimo kapacitete: $c_1 = 10, c_2 = 2, c_3 = -1, c_4 = 3,\ a_1 = 3, a_2 = 1, a_3 = 3.$

Možemo da stavimo da je $x_4 = 1$ (x_4 uzima svoju maksimalnu vrednost obzirom da tada neće narušiti početna ograničenja). Budući da vrednost promenljive x_4 ne utiče na ograničenja možemo uzeti da je $x_4 = 1$ i tražiti $\max F(x) = 10x_1 + 2x - 2 - x_3 + 3$. Izborom $x_4 = 0$ se dobija lošije rešenje.

Formiramo tablice $F_k(y)$ i $i_k\ (y)$ korišćenjem rekurentnih formula:

$$F_1(y) = c_1[y/a_1] = 10[y/3]$$
$$F_2(y) = \max\{F_1(y), c_2 + F_1(y - a_2)\} = \max\{F_1(y), 2 + F_1(y - 1)\}$$
$$F_3(y) = \max\{F_2(y), c_3 + F_2(y - a_3)\} = \max\{F_2(y), -1 + F_2(y - 3)\}$$

$$i_2(y) = \begin{cases} i_1(y) & F_1(y) > 2 + F_1(y - 1) \\ 2 & F_1 \leq 2 + F_1(y - 1) \end{cases}$$
$$i_3(y) = \begin{cases} i_2(y) & F_2(y) > 2 + F_2(y - 3) \\ 3 & F_2 \leq -1 + F_2(y - 3) \end{cases}$$

k\y	0	1	2	3	4
1	0	0	0	10	10
2	0	2	2	10	12
3	0	2	2	10	12

i\y	0	1	2	3	4
1	0	0	0	1	1
2	0	2	2	1	2
3	0	2	2	1	2

U tablici sa leve strane vidimo da se maksimum dostiže za $F_3(4) = 12$. Rekonstruisaćemo raspored pakovanja:

Kako je $i_3(4) = 2 \rightarrow x_2 = 1.$

Dalje gledamo za $F_3(4 - a_2) = 3,\ i_3(3) = 1 \rightarrow x_1 = 1,$ a zatim $F_3(3 - a_1) = 0, i_3(0) = 0 \rightarrow x_3 = 0.$

Konačno: $x_1 = 1, x_4 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0.$

Dakle,

$$f_{max} = 12 + 3 = 15$$

PRIMER 60

Rešiti problem ranca koristeći rekurentnu formulu unapred.

$$\max\ 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 5x_5$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 \leq 8$$
$$x_i \in [0,1], \qquad i = 1,2,3,4,5.$$

Rešenje:

Prvo odredimo kapacitete: $c_1 = 3, c_2 = 1, c_3 = 7, c_4 = 2, c_5 = 5,\ a_1 = 4, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 6.$

Formiramo tablice $F_k(y)$ i $i_k\ (y)$

Korišćenjem rekurentnih formula:

$$F_1(y) = c_1[y/a_1] = 3[y/4]$$
$$F_2(y) = \max\{F_1(y), c_2 + F_1(y - a_2)\} = \max\{F_1(y), 1 + F_1(y-1)\}$$
$$F_3(y) = \max\{F_2(y), c_3 + F_2(y - a_3)\} = \max\{F_2(y), 7 + F_2(y-2)\}$$
$$F_4(y) = \max\{F_3(y), c_4 + F_3(y - a_4)\} = \max\{F_3(y), 2 + F_3(y-3)\}$$
$$F_5(y) = \max\{F_4(y), c_5 + F_4(y - a_5)\} = \max\{F_4(y), 5 + F_4(y-6)\}$$

$$i_2(y) = \begin{cases} i_1(y) & F_1(y) > 1 + F_2(y-1) \\ 2 & F_1 \leq 1 + F_2(y-1) \end{cases}$$
$$i_3(y) = \begin{cases} i_2(y) & F_2(y) > 7 + F_3(y-2) \\ 3 & F_2 \leq 7 + F_3(y-2) \end{cases}$$

k\y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	3	3	3	3	6
2	0	1	1	1	3	4	4	4	6
3	0	1	7	8	8	8	10	11	11
4	0	1	7	8	8	9	10	11	11
5	0	1	7	8	8	9	10	11	12

i\y	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	0	0	0	0	1	1	1	1	1
2	0	2	2	2	1	2	2	2	1
3	0	2	3	3	3	3	3	3	3
4	0	2	3	3	3	4	3	3	3
5	0	2	3	3	3	4	3	3	5

Konačno, imamo da se maksimum dostiže za $F_5(8) = 12 \rightarrow i_5(8) = 5 \rightarrow x_5 = 1$. Dalje imamo da je $i_5(8 - a_5) = i_5(2) = 3 \rightarrow x_3 = 1$. Zatim $i_5(2 - a_3) = i_5(0) = 0 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0$.

$$f_{max} = 12 \text{ za } x = (0,0,1,0,1)$$

NAPOMENA

U slučaju da je skup rešenja Z i da smo tokom rekonstrukcije rešenja imali $i_k(y_j) = s,\ j = 1,2,\dots,m$ promenljiva x_s dobija vrednost m. Videti zadatak 62.

PRIMER 61

Rešiti problem ranca koristeći rekurentnu formulu unazad.

$$\max 3x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 + 5x_5$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_5 \leq 8$$
$$x_i \in [0,1], i = 1,2,3,4,5.$$

Rešenje:

$$F_5(8) = \max_{0\leq x_5\leq 1}\{5x_5 + F_4(8 - 6x_5)\} = \max\{F_4(8), 5 + F_4(2)\} =..= 12$$
$$F_4(8) = \max_{0\leq x_4\leq 1}\{2x_4 + F_3(8 - 3x_4)\} = \max\{F_3(8), 2 + F_3(5)\} =..= 11$$
$$F_4(2) = \max_{0\leq x_4\leq 1}\{2x_4 + F_3(2 - 3x_4)\} = \max\{F_3(2)\} =..= 7$$
$$F_3(8) = \max_{0\leq x_3\leq 1}\{7x_3 + F_2(8 - 2x_3)\} = \max\{F_2(8), 7 + F_2(6)\} =..= 11$$
$$F_3(5) = \max_{0\leq x_3\leq 1}\{7x_3 + F_2(5 - 2x_3)\} = \max\{F_2(5), 7 + F_2(3)\} =..= 8$$
$$F_3(2) = \max_{0\leq x_3\leq 1}\{7x_3 + F_2(2 - 2x_3)\} = \max\{F_2(2), 7 + F_2(0)\} =..= \max\{1, 7\} = 7$$

$F_2(8) = \max_{0 \le x_2 \le 1}\{x_2 + F_1(8 - x_2)\} = \max\{F_2(8), 7 + F_2(6)\} =.. = \max\{4, 11\} = 11$

$F_2(6) = \max_{0 \le x_2 \le 1}\{x_2 + F_1(6 - x_2)\} = \max\{F_1(6), 1 + F_1(5)\} = \cdots. = 4$

$F_2(5) = \max_{0 \le x_2 \le 1}\{x_2 + F_1(5 - x_2)\} = \max\{F_1(5), 1 + F_1(4)\} = \cdots. = 4$

$F_2(3) = \max_{0 \le x_2 \le 1}\{x_2 + F_1(3 - x_2)\} = \max\{F_1(3), 1 + F_1(2)\} = \cdots. = 1$

$F_2(2) = \max_{0 \le x_2 \le 1}\{x_2 + F_1(2 - x_2)\} = \max\{F_1(2), 1 + F_1(2)\} = \cdots. = 1$

$F_2(0) = \max_{0 \le x_2 \le 1}\{x_2 + F_1(0 - x_2)\} = F_2(0) = 0$

$F_1(0) = 3 \cdot \left[\frac{0}{4}\right] = 0$ $\quad F_1(3) = 3 \cdot \left[\frac{3}{4}\right] = 0$ $\quad F_1(6) = 3 \cdot \left[\frac{6}{4}\right] = 1$

$F_1(1) = 3 \cdot \left[\frac{1}{4}\right] = 0$ $\quad F_1(4) = 3 \cdot \left[\frac{4}{4}\right] = 1$ $\quad F_1(7) = 3 \cdot \left[\frac{7}{4}\right] = 1$

$F_1(2) = 3 \cdot \left[\frac{2}{4}\right] = 0$ $\quad F_1(5) = 3 \cdot \left[\frac{5}{4}\right] = 1$ $\quad F_1(8) = 3 \cdot \left[\frac{8}{4}\right] = 1$

Obratiti pažnju da x_1 može imati samo vrednosti 0 i 1, te stoga pišemo da je $F_1(8) = 3 \cdot 1 = 1$!!!
Vraćamo vrednost nazad:

$F_5(8) \to \quad x_5 = 1$ $\quad F_3(2) \to \quad x_3 = 1$ $\quad F_1(0) \to x_1 = 0$

$F_4(2) \to \quad x_4 = 0$ $\quad F_2(0) \to x_2 = 0$

PRIMER 62

Rešiti problem ranca koristeći rekurentnu formulu unazad.

$$\max 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \le 9$$
$$x_i \in Z, i = 1,2,3,4.$$

Rešenje:

$F_4(9) = \max_{0 \le x_4 \le 1}\{2x_4 + F_3(9 - 5x_4)\} = \max\{F_3(9), 2 + F_3(4)\} = 13$

// tražimo maksimum za svaku potencijalnu vrednost promenljive x_4

$F_3(9) = \max_{0 \le x_3 \le 2}\{5x_3 + F_2(9 - 4x_3)\} = \max\{F_2(9), 5 + F_2(5), 10 + F_2(1)\} = \max\{13,12,10\} = 13$

$F_3(4) = \max_{(0 \le x_3 \le 1)}\{5x_3 + F_2(4 - 4x_3)\} = \max\{F_2(4), 5 + F_2(0)\} = \max\{6,5\} = 6$

$F_2(9) = \max_{0 \le x_2 \le 3}\{4x_2 + F_1(9 - 3x_2)\} = \max\{F_1(9), 4 + F_1(6), 8 + F_1(3), 12 + F_1(0)\} = \max\{12,13,11,12\} = 11$

$F_2(5) = \max_{0 \le x_2 \le 1}\{4x_2 + F_1(5 - 3x_2)\} = \max\{F_1(5), 4 + F_1(2)\} = \max\{6,7\} = 7$

$F_2(4) = \max_{0 \le x_2 \le 1}\{4x_2 + F_1(4 - 3x_2) = \max\{F_1(4), 4 + F_1(1)\} = \max\{6,4\} = 6$

$F_2(1) = \max_{0 \le x_2 \le 0}\{4x_2 + F_1(1 - 3x_2)\} = \max\{F_1(1)\} = 0$

$F_2(0) = \max_{0 \le x_2 \le 0}\{ 4x_2 + F_1(0 - 3x_2)\} = \max\{F_1(0)\} = 0$

$F_1(0) = 3 * \left[\frac{0}{2}\right] = 0$ $\quad F_1(2) = 3 * \left[\frac{2}{2}\right] = 3$ $\quad F_1(4) = 3 * \left[\frac{4}{2}\right] = 6$ $\quad F_1(6) = 3 * \left[\frac{6}{2}\right] = 9$

$F_1(1) = 3 * \left[\frac{1}{2}\right] = 0$ $\quad F_1(3) = 3 * \left[\frac{3}{2}\right] = 3$ $\quad F_1(5) = 3 * \left[\frac{5}{2}\right] = 6$ $\quad F_1(9) = 3 * \left[\frac{9}{2}\right]$ =12

Rekonstruišemo raspored:

Maximalna vrednost ranca je 13 i postignuta je za $x_4 = 0$ a dostiže se za $F_3(9)$ koje svoju maksimalnu vrednost dobija kada je $x_3 = 0$. Poslednja vrednost dostiže se za $F_2(9)$ koji svoj maksimum dostiže za $x_2 = 1$, odnosno za maksimalno $F_1(6)$ koje, opet, svojm maksimum dostiže za $x_1 = 3$.

Konačno, traženo rešenje je oblika : $(3,1,0,0)$

Slično rešenje dobićemo i formulom unapred. U nastavku slede tablice i rekonstrukcija rešenja.

k\y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	3	3	6	6	9	9	12	12
2	0	0	3	4	6	7	9	10	12	13
3	0	0	3	4	6	7	9	10	12	13
4	0	0	3	4	6	7	9	10	12	13

i\y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	0	1	2	1	2	1	2	1	2
3	0	0	1	2	1	2	1	2	1	2
4	0	0	1	2	1	2	1	2	1	2

$$F_{max} = F_3(9) = 13$$
$$i_3(9) = 2 \rightarrow x_2 = 1,$$
$$i_3(9-3) = i_3(6) = 1 \rightarrow x_1 = 1$$
$$i_3(6-2) = i_3(4) = 1 \rightarrow x_1 += 1 \rightarrow \quad x_1 = 2$$
$$i_3(4-2) = i_3(2) = 1 \rightarrow \quad x_1 += 1 \quad \rightarrow \quad x_1 = 1$$
$$i_3(2-2) = i_3(0) = 0 \rightarrow x_3 = 0,\ x_4 = 0$$

Slično rešenje bi dobili kada bi rekonstrukciju rešenja počeli od $F_2(9)$, odnosno $F_4(9)$.

Svodjenje asimptotskog problema na problem ranca na grupi

PRIMER 63

Rešiti problem ranca na grupi

$$\min 3x_1 + 11x_2 + 13x_3 + 5x_4$$
$$g_1x_1 \oplus g_2x_2 \oplus g_3x_3 \oplus g_4x_4 = g_5$$
$$x_i \geq 0, x_i \in Z, i = 1,..,4$$
$$g_i \in S = \left\{ g_1 = \begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix}, g_4 = \begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix}, g_5 = \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix}, g_6 = \begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix}, g_7 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\}$$

Gde je grupa određena po modulu 7.

Rešenje:

$$F_4(g_5) = \min_{(0 \leq x_4 \leq 6)} \{5x_4 + F_3(g_5 \ominus g_4x_4)\} = \min\{5x_4 + F_3(g_5 \oplus (-g_4)x_4)\} = \min\{5x_4 + F_3(g_5 \oplus g_5x_4)\}$$
$$= \min\{F_3(g_5), 5 + F_3(2g_5), 10 + F_3(3g_5), 15 + F_3(4g_5), 20 + F_3(5g_5), 25 + F_3(6g_5), 30 + F_3(7g_5)\}$$
$$= \min\{F_3(g_5), 5 + F_3(g_2), 10 + F_3(g_3), 15 + F_3(g_6), 20 + F_3(g_1), 25 + F_3(g_4), 30 + F_3(g_7)\}$$

$$2g_5 = \begin{pmatrix}2\\6\\12\end{pmatrix} = (mod\ 7) = \begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix} = g_2 \qquad 5g_5 = g_1$$
$$3g_5 = \begin{pmatrix}3\\9\\18\end{pmatrix} = (mod\ 7) = \begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix} = g_3 \qquad 6g_5 = g_4$$
$$4g_5 = \begin{pmatrix}4\\12\\24\end{pmatrix} = (mod\ 7) = \begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix} = g_6 \qquad 7g_5 = g_7$$

$$F_3(g_5) = \min_{0 \leq x_3 \leq 6} \{13x_3 + F_2(g_5 \ominus g_3x_3\} = \min\{13x_3 \oplus g_6x_3\} =$$
$$\min\{F_2(g_5), 13 + F_2(g_5 \oplus g_6), 26 + F_2(g_5 \oplus 2g_6), 39 + F_2(g_5 \oplus 3g_6), 52 + F_2(g_5 \oplus 4g_6),$$
$$65 + F_2(g_5 \oplus 5g_6), 78 + F_2(g_5 \oplus 6g_6)\} =$$
$$\min\{F_2(g_2), 13 + F_2(g_1), 26 + F_2(g_3), 39 + F_2(g_4), 52 + F_2(g_3), 65 + F_2(g_7), 78 + F_2(g_1)\} =$$

$$g_5 \oplus g_6 = \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\8\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} = g_1 \qquad g_5 \oplus 2g_6 = \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}8\\10\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\13\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix} = g_2$$

$g_5 \oplus 3g_6 = \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}12\\15\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\18\\15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\4\\1\end{pmatrix} = g_4$ $\quad$ $g_5 \oplus 5g_6 = \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}20\\25\\15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21\\28\\21\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = g_7$

$g_5 \oplus 4g_6 = \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}16\\20\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17\\23\\18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} = g_3$ $\quad$ $g_5 \oplus 6g_6 = \begin{pmatrix}1\\3\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}24\\30\\18\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}25\\33\\24\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\5\\3\end{pmatrix} = g_6$

$F_3(g_2) = \cdots = \min\{F_2(g_2), 13 + F_2(g_4), 26 + F_2(g_3), 39 + F_2(g_7), 52 + F_2(g_6), 65 + F_2(g_2), 78 + F_2(g_1)\} = 11$
$F_3(g_3) = \cdots = \min\{F_2(g_3), 13 + F_2(g_7), 26 + F_2(g_6), 39 + F_2(g_7), 52 + F_2\ (g_1), 65 + F_2(g_2), 78 + F_2(g_4)\} = 6$
$F_3(g_6) = \cdots = 15$

$F_3(g_1) = \cdots = 3$	$F_2(g_1) = \cdots = 3$	$F_2(g_4) = \cdots = 12$	$F_2(g_7) = \cdots = 0$
$F_3(g_4) = \cdots = 12$	$F_2(g_2) = \ldots = 2$	$F_2(g_5) = \cdots = 9$	
$F_3(g_7) = \cdots = 0$	$F_2(g_3) = \cdots = 6$	$F_2(g_6) = \cdots = 15$	

$F_1(g_1) = \{3x_1 | x_1 g_1 = g_1\} \to \quad x_1 \begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} \to x_1 = 1 \ \to F_1(g_1) = 3$

Analogno: $F_1(g_2) = \{3x_1 | x_1 g_1 = g_2\} \ \to \ x_1 \begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\6\\5\end{pmatrix} \to x_1 = 6 \ \to F_1(g_2) = 18$

$F_1(g_3) = \{3x_1 | x_1 g_1 = g_3\} \ \to \ x_1 \begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\\4\end{pmatrix} \to x_1 = 2 \ \to F_1(g_3) = 6$

$F_1(g_4) = 12$
$F_1(g_5) = 9$
$F_1(g_6) = 15$
$F_1(g_7) = 0$
Rekonstruišimo rešenje:

$f_{\min} = 9$ za $x_4 = 0, x_3 = 0, x_2 = 0, x_1 = 3$.

PRIMER 64

Napisati asimptotski problem i svesti ga na problem ranca na grupi:

$$\min -x_2$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 6$$
$$-3x_1 + 2x_2 \leq 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0, \ \ x_1, x_2 \in Z$$

Rešenje

Uvodimo izravnajuće promenljive, dobijamo problem:

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6$$
$$-3x_1 + 2x_2 + x_4 = 0$$

Posmatramo baze $A = [A_B | A_N]$:

$A_B = \begin{bmatrix}3 & 2\\-3 & 2\end{bmatrix}, {A_B}^{-1} = \frac{1}{32}\begin{bmatrix}2 & -2\\3 & 3\end{bmatrix}, A_N = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$.

Dalje, polazni sistem $Ax = b$ prevodimo na problem $A_B x_B + A_N x_N = b$ i rešavamo ga po baznim promenljivim x_B, dobijamo $x_B = {A_B}^{-1}(b - A_N x_N)$. Zamenom u polazni sistem dobija se novi problem u kome figurišu samo nebazične promenljive

$$\min c_N^T - c_B^T {A_B}^{-1} A_N$$

pri ograničenjima

$$A_B^{-1}(b - A_N x_N) \geq 0,$$
$$A_B^{-1}(b - A_N x_N) \in Z^m,$$
$$x_N \geq 0\ , x_N \in Z^{n-m}$$

Uzimajući da je Smitova forma matrice A: $D = U A_B V, {A_B}^{-1} = V D^{-1} U$ sledi da je vektor $A_B^{-1} = D^{-1}(Ub - U A_N x_N)$ celobrojan. Ako se još uvede da je $Ub = (k_1, k_2, \ldots, k_m)$ i u $U A_N = [v_{ij}]$ a poslednji izraz će biti zadovoljen ako za svako *i* za koje je $d_i > 1$, d deli $\sum_{j \in N} r_{ij} x_j - k_i$. Asimptotski problem dobija formu.

Smitova forma matrice A je $S = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 12\end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix}1 & 0\\5 & 1\end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{bmatrix}$, a dalje imamo da je

$$D^{-1}(Ub - UA_N x_n) celo$$

$$Ub = \begin{bmatrix}1 & 0\\5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\0\end{bmatrix} = [6 \quad 30]$$

$$UA_N x_n = \begin{bmatrix}1 & 0\\5 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x_3\\5x_3 + x_4\end{bmatrix}$$

Konačno,

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1/12\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}6\\30\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}x_3\\5x_3 + x_4\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1/12\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 - x_3\\30 - 5x_3 - x_4\end{bmatrix} = [6 - x_3 \quad 1/12(30 - 5x_3 - x_4)]$$

treba da je celo, dakle ograničenja su

$30 - 5x_3 - x_4 \equiv 0\ (mod\ 12)$ odnosno $5x_3 + x_4 \equiv 6\ (mod\ 12)$

Ostaje funkcija cilja:

$$r_N^T = c_N^T - c_B A_B{}^{-1} A_N = [0 \quad 0] - [0 \quad -1]\frac{1}{32}\begin{bmatrix}2 & -2\\3 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \cdots = \begin{bmatrix}\frac{3}{32} & \frac{3}{32}\end{bmatrix} = \frac{3}{32}[1 \quad 1], \text{ tj. } \min\frac{3}{32}(x_3 + x_4)$$

Konačno, možemo zapisati početni problem kao problem ranca na grupi

$$\min\frac{3}{32}(x_3 + x_4)$$
$$5x_3 + x_4 \equiv 6\ (mod\ 12)$$
$$x_3, x_4 \in Z^n$$

PRIMER 65

Napisati asimptotski problem i svesti ga na problem ranca na grupi:

$$\min -3x_1 - 2x_2$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 5$$
$$2x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0, x_1, x_2 \in Z$$

Rešenje

Pratimo algoritam iz prethodnog primera. Uvodimo izravnajuće promenljive prvo

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 5$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 6$$

$A_B = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}, A_B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}, A_N = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

Smith-ova forma matrice A je $D = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{bmatrix}$

$$Ub = \begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix} = [5 \quad -4]^T$$

$$UA_N x_N = \begin{bmatrix}1 & 0\\-2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}[x_3 \quad x_4]^T = \begin{bmatrix}x_3\\-2x_3 + x_4\end{bmatrix}$$

$$D^{-1}(Ub - UA_N x_N) = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 - x_3\\-4 + 2x_3 - x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5 - x_3\\\frac{1}{3}(-4 + 2x_3 - x_4)\end{bmatrix}$$

Dakle, treba da važi

$2x_3 - x_4 \equiv -4\ (mod\ 3)$

I konačno, funkcija cilja

$$r_N^T = c_N^T - c_B A_B{}^{-1} A_N = [-3 \quad -2]\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1 & 2\\2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}[-1 \quad -4]$$

Konačno, dobili smo problem ranca na grupi

$$\min \quad -\frac{1}{4}(x_3 + 4x_4)$$
$$2x_3 - x_4 \equiv -4\ (mod\ 3)$$
$$x_3, x_4 \in Z^n$$

PRIMER 66

Rešiti problem

$$\min 3x + 8y$$
$$x \equiv 0 \ (mod\ 2)$$
$$x + 3y \equiv 1 \ (mod\ 4)$$
$$x, y \geq 0, \quad x, y \in Z$$

Rešenje:

Ovo je problem ranca na grupi $(G,\oplus)$

$$\min 3x + 8y$$
$$x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \oplus y\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$
$$x, y \geq 0, \quad x, y \in Z$$

sa $G = \left\{\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \middle|, a \in \{0,1\}, b \in \{0,1,2,3\}\right\}$ i operacijom $\oplus$ definisanom sa

$$\begin{bmatrix}a\\b\end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix}c\\d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a +_2 c\\b +_4 d\end{bmatrix}$$

Prema rekurentnoj relaciji imamo da je

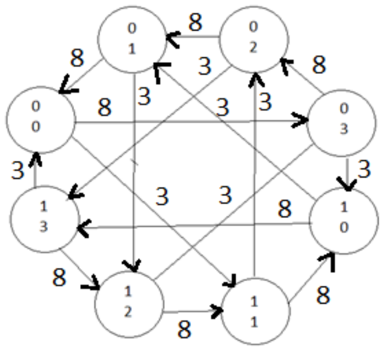
$$F_2\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \min\left\{8\cdot 0 + F_1\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right), 8\cdot 1 + F_1\left(\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right), 8\cdot 2 + F_1\left(\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\right), 8\cdot 3 + F_1\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right)\right\}$$

Dalje je

$$F_1\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \min\{3x \mid x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\} = \infty$$
$$F_1\left(\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right) = \min\{3x \mid x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\} = 3\cdot 2 = 6$$
$$F_1\left(\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\right) = \min\{3x \mid x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}\} = \infty$$
$$F_1\left(\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\right) = \min\{3x \mid x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\} = 0$$

Zamenom se iz $F_2\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \min\{\infty, 14, \infty, 24\} = 14$ i $F_1\left(\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\right) = 6$ dobija da je $x = 2, y = 1$.

Dijagram koji odgovara ovom problemu je



Najkraći put koji spaja $\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ ima dve grane dužine 3 i jednu granu dužine 8.