TRANSPORTNI PROBLEM

PRIMER 50

Pretpostavimo da određeni lanac prodavnica raspolaže sa 3 magacina i 4 izložbena prostora. Magacine ćemo obeležiti sa $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2$ i M_3, dok ćemo izložbene prostore obeležiti sa T_1, T_2 , T_3 i T_4. Ako magacini imaju robe da napune 2, 6 i 7 kamiona dnevno, a izložbeni prostori mogu da prodaju 3, 3, 4 i 5 kamiona robe dnevno, potrebno je da se napravi plan vožnje tako da se roba preveze za što kraće vreme. Vreme potrebno da određeni kamion pređe od magacina do izložbenog prostora izraženo je u minutima i dato u tabeli.

izložbeni prostor / magacin	T_1	T_2	T_3	T_4
M_1	20	11	15	13
M_2	17	14	12	13
M_3	15	12	18	18

REŠENJE:

Ukoliko je roba koja se potražuje jednaka količini robe koja se može dostaviti onda se taj problem naziva ZATVORENIM TRANSPORTNIM PROBLEMOM.

Neka je x_{ij} količina robe koja se transportuje iz magacina M_i do izložbenog prostora T_j. Neka transport robe iz magacina M_1, koji je kapaciteta 2 kamiona, do izložbenog prostora T_1, traje 20 min dok transport do izložbenog prostora T_2 traje 11 min i tako redom. Radi preglednosti data je tablica transporta:

Utovarno mesto / Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona
M_1	20 x_{11}	11 x_{12}	15 x_{13}	13 x_{14}	**2**
M_2	17 x_{21}	14 x_{22}	12 x_{23}	13 x_{24}	**6**
M_3	15 x_{31}	12 x_{32}	18 x_{33}	18 x_{33}	**7**
Br.potreb.kamiona	**3**	**3**	**4**	**5**	**15/15**

Transportni problem predstavlja problem linearnog programiranja (jedinična vremena su linearna u odnosu prema broju kamiona) i može se rešavati na više načina:

- simpleks metodom ili
- specijalnim metodama za rešavanje transportnih problema linearnog problema.

Rešavanje transportnog problema Simpleks metodom

Formiraćemo matematički model

$$Min\,Z = 20x_{11} + 11x_{12} + 15x_{13} + 13x_{14} + 17x_{21} + 14x_{22} + 12x_{23} + 13x_{24} + $$
$$+ 15x_{31} + 12x_{32} + 18x_{33} + 18\,x_{34}$$

uz ograničenja

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 2$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 6$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 7$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 3$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 3$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 4$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 5$$
$$x_{ij} \geq 0, \qquad i = 1,2,3; \;\; j = 1,2,3,4.$$

Da bi se problem rešavao Simpleks metodom, moramo uvesti izjednačavajuće promenljive kako bi napravili jediničnu podmatricu...

Rešavanje transportnog problema specijalnim metodama

Razlikujemo metode za određivanje početnog rešenja

1. Metoda severozapadnog ugla
2. Metoda najmanjih cena
3. Vogelova metoda

kao i metode za njegovo popravljanje i dobijanje optimalnog rešenja

1. Metoda skakanja s' kamena na kamen
2. Metoda potencijala
3. MOBI metoda

Metoda severozapadnog ugla

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona
M_1	20 **2**	11	15	13	**2**
M_2	17 **1**	14 **3**	12 **2**	13	**6**
M_3	15	12	18 **2**	18 **5**	**7**
Br.potreb.kamiona	**3**	**3**	**4**	**5**	**15/15**

Vreme transporta iznosi $Z = 20 \cdot 2 + 17 \cdot 1 + 14 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 18 \cdot 2 + 18 \cdot 5 = 249$ minuta.

Metoda najmanjih troškova

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona
M_1	20	11 **2**	15	13	**2**
M_2	17	14	12 **4**	13 **2**	**6**
M_3	15 **3**	12 **1**	18	18 **3**	**7**
Br.potreb.kamiona	**3**	**3**	**4**	**5**	**15/15**

Vreme transporta iznosi $Z = 11 \cdot 2 + 12 \cdot 4 + 13 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 12 \cdot 1 + 18 \cdot 3 = 207$ minuta.

Fogelova metoda

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona	Razlika
M_1	20	11	15	13 **2**	**2**	2, 2, 2, Z
M_2	17	14	12 **4**	13 **2**	**6**	1, 1, 1
M_3	15 **3**	12 **3**	18	18 **1**	**7**	3, 3, 0, Z
Br.potreb.kamiona	**3**	**3**	**4**	**5**	**15/15**	_
razlika	2, Z	1, Z	3, 6, Z	0, 5	_	_

Vreme transporta iznosi $Z = 13 \cdot 2 + 12 \cdot 4 + 13 \cdot 2 + 15 \cdot 3 + 12 \cdot 3 + 18 \cdot 1 = 199$ minuta.

Metoda skakanja sa kamena na kamen

Ova metoda nalazi optimalno rešenje na osnovu ranije dobijenog početnog baznog rešenja pomoću neke od prethodno navedenih metoda. Neka je, na primer, početno rešenje dobijeno metodom severozapadnog ugla.

Relativni troškovi dobijaju se "skakanjem s kamena na kamen" naizmeničnim sabiranjem i oduzimanjem jediničnih troškova počevši od polja za koje se izračunava relativni trošak, a nastavlja u smeru kazaljke ili suprotno, po zauzetim poljima u zavisnosti od putanje.

Prvo bazično rešenje,

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona
M_1	20 / 2	11	15	13	2
M_2	17 / 1	14 / 3	12 / 2	13	6
M_3	15	12	18 / 2	18 / 5	7
Br.potreb.kamiona	3	3	4	5	15/15

$Z\ =\ 20\cdot 2+17\cdot 1+14\cdot 3+12\cdot 2+18\cdot 2+18\cdot 5\ =\ 249$ min

Formiramo lanac za svako od polja (1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (3,1) i (3,2)

$$k_{12}=c_{12}-c_{22}+c_{21}-c_{11}=11-14+17-20=-6$$
$$k_{13}=c_{13}-c_{23}+c_{21}-c_{11}=15-12+17-20=0$$
$$k_{14}=c_{14}-c_{34}+c_{33}-c_{23}+c_{21}-c_{11}=13-18+18-12+17-20=-2$$
$$k_{24}=c_{24}-c_{33}+c_{23}=13-18+18-12=1$$
$$k_{31}=c_{31}-c_{33}+c_{31}-c_{21}=15-18+12-17=-8$$
$$k_{32}=c_{32}-c_{33}+c_{23}-c_{22}=12-18+12-14=-8$$

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona
M_1	20 / 2	11 / -6	15 / 0	13 / -2	2
M_2	17 / 1	14 / 3	12 / 2	13 / 1	6
M_3	15 / -8	12 / -8	18 / 2	18 / 5	7
Br.potreb.kamiona	3	3	4	5	15/15

Budući da relativni troškovi na nezauzetim poljima pokazuju da početni program po metodi severozapadnog ugla nije optimalan (postoji k_{ij} sa negativnim vrednostima), potrebno je promeniti bazu i odrediti drugo bazno rešenje.

Promena baze obavlja se na sledeći način:

U polje sa najmanjim relativnim troškom (u ovom slučaju to su polja (3,1) i (3,2)), stavlja se najmanji negativno označen "kamen" (za prvo polje kamen je obeležen sa θ, dok je za drugo polje kamen obeležen sa λ). Od ostalih negativno označenih kamena oduzima se taj najmanji negativno označen kamen, a pozitivno označenim kamenima se dodaje taj iznos.

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona
M_1	20 2	11 -6	15 0	13 -2	2
M_2	17 1-θ	14 $3-\lambda$	12 $2+\theta, 2+\lambda$	13 1	6
M_3	15 θ	12 λ	18 2-$\theta, 2-\lambda$	18 5	7
Br.potreb.kamiona	3	3	4	5	15/15

Iz tablice vidimo da je $\theta = 1$, $\lambda = 2$. Dakle, povoljnije je da se promeni baza na polju (3,2), dobijamo drugo bazno rešenje:

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona
M_1	20 2	11	15	13	2
M_2	17 1	14 1	12 4	13	6
M_3	15	12 2	18	18 5	7
Br.potreb.kamiona	3	3	4	5	15/15

$Z = 20 \cdot 2 + 17 \cdot 1 + 14 \cdot 1 + 12 \cdot 4 + 12 \cdot 2 + 18 \cdot 5 = 233$ minuta.
Formiramo lanac za svako od nebaznih polja (1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (3,1) i (3,3):

$$k_{12} = c_{12} - c_{22} + c_{21} - c_{11} = 11 - 14 + 17 - 20 = -6$$
$$k_{13} = c_{13} - c_{23} + c_{21} - c_{11} = 15 - 12 + 17 - 20 = 0$$
$$k_{14} = c_{14} - c_{34} + c_{32} - c_{22} + c_{21} - c_{11} = 13 - 18 + 12 - 14 + 17 - 20 = -10$$
$$k_{24} = c_{24} - c_{34} + c_{32} - c_{22} = 13 - 18 + 12 - 14 = -7$$
$$k_{31} = c_{31} - c_{32} + c_{22} - c_{21} = 15 - 12 + 14 - 17 = 0$$
$$k_{33} = c_{33} - c_{32} + c_{22} - c_{23} = 18 - 12 + 14 - 12 = 8$$

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona
M_1	20 2	11 -6	15 0	13 -10	2
M_2	17 1	14 1	12 4	13 -7	6
M_3	15 0	12 2	18 8	18 5	7
Br.potreb.kamiona	3	3	4	5	15/15

Promena baze se obavlja na polju (1,4) stavljanjem kamena vrednosti 1.
Treće bazno rešenje

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona
M_1	20 1	11	15	13 1	2
M_2	17 2	14 0	12 4	13	6
M_3	15	12 3	18	18 4	7
Br.potreb.kamiona	3	3	4	5	15/15

$Z \;=\; 20\cdot 1 + 17\cdot 2 + 12\cdot 3 + 12\cdot 4 + 13\cdot 1 + 18\cdot 4 \;=\; 223$ minuta.
Formiramo lanac za svako od nebaznih polja (1,2), (1,3), (2,2), (2,4), (3,1) i (3,3):

$$k_{12} = c_{14} - c_{34} + c_{32} = 11 - 13 + 18 - 12 = 4$$
$$k_{13} = c_{13} - c_{11} + c_{21} - c_{23} = 15 - 20 + 17 - 12 = 0$$
$$k_{22} = c_{22} - c_{21} + c_{11} - c_{14} + c_{34} - c_{32} = 14 - 17 + 20 - 13 + 18 - 12 = 10$$
$$k_{24} = c_{24} - c_{14} + c_{11} - c_{21} = 13 - 17 + 20 - 13 = 3$$
$$k_{31} = c_{31} - c_{34} + c_{14} - c_{11} = 15 - 18 + 13 - 20 = -10$$
$$k_{33} = c_{33} - c_{34} + c_{14} - c_{11} + c_{21} - c_{23} = 18 - 18 + 13 - 20 - 17 + 12 = -2$$

Menjamo bazu na polju (3,1) pošto je k_{33} najmanje.

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona
M_1	20 1	11 4	15 0	13 1	2
M_2	17 2	14 10	12 4	13 3	6
M_3	15 -10	12 3	18 -2	18 4	7
Br.potreb.kamiona	3	3	4	5	15/15

Sada kamen ima vrednost 1.
Četvrto bazno rešenje

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona
M_1	20 0	11	15	13 2	2
M_2	17 2	14	12 4	13	6
M_3	15 1	12 3	18	18 3	7
Br.potreb.kamiona	3	3	4	5	15/15

$Z \;=\; 13\cdot 2 + 17\cdot 2 + 12\cdot 4 + 15\cdot 1 + 12\cdot 3 + 18\cdot 3 \;=\; 213$ minuta.
Formiramo lanac za svako od nebaznih polja (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,4) i (3,3):

$$k_{11} = c_{11} - c_{14} + c_{34} + c_{31} = 20 - 13 + 18 - 15 = 0$$
$$k_{12} = c_{12} - c_{14} + c_{34} + c_{32} = 11 - 13 + 18 - 12 = 4$$
$$\dots$$
$$k_{33} = c_{33} - c_{31} + c_{21} - c_{23} = 18 - 15 + 17 - 12 = 8$$

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona
M_1	20 0	11 4	15 10	13 2	2
M_2	17 2	14 0	12 4	13 -7	6
M_3	15 1	12 3	18 8	18 3	7
Br.potreb.kamiona	3	3	4	5	15/15

Sada se menja polje (2,4). Uzimamo da je kamen 1.
Peto bazno rešenje:

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona
M_1	20	11	15	13 2	2
M_2	17	14	12 4	13 2	6
M_3	15 3	12 3	18	18 1	7
Br.potreb.kamiona	3	3	4	5	15/15

$Min\,Z \;=\; 13\cdot 2 + 12\cdot 4 + 13\cdot 2 + 15\cdot 3 + 12\cdot 3 + 18\cdot 1 \;=\; 199$ minuta.
Budući da su svi relativni troškovi pozitivni

$$k_{11} = c_{11} - c_{14} + c_{34} - c_{31} = 20 - 13 + 18 - 15 = 10$$
$$k_{12} = c_{12} - c_{14} + c_{44} - c_{32} = 11 - 13 + 18 - 12 = 4$$
$$k_{13} = c_{13} - c_{14} + c_{24} - c_{23} = 15 - 13 + 13 - 12 = 3$$
$$k_{21} = c_{21} - c_{24} + c_{34} - c_{31} = 17 - 13 + 18 - 15 = 7$$
$$k_{22} = c_{22} - c_{24} + c_{34} - c_{32} = 14 - 13 + 18 - 12 = 7$$
$$k_{33} = c_{33} - c_{34} + c_{24} - c_{33} = 18 - 18 + 13 - 12 = 1$$

peto bazno rešenje je optimalno.

$$Min\,Z \;=\; 199 \text{ min}$$
$$x_{14} \;=\; 2, \qquad x_{23} \;=\; 4, \qquad x_{24} \;=\; 2, \qquad x_{31} \;=\; 3, \qquad x_{32} \;=\; 3, \qquad x_{34} \;=\; 1$$

Prema optimalnom rešenju svakodnevno se kamioni raspoređuju na sledeći način:

Od magacina M_1 do prodajnog salona T_4 saobraća jedan kamion, od magacina M_2 4 kamiona idu ka prodajnom mestu T_3 dok 2 kamiona idu ka prodajnom mestu T_4 i konačno, magacin M_3 snabdeva prodajna mesta T_1, T_2 i T_4 sa 3, 3 i 1 kamionom tim redom. Na ovaj način „prazni hod“ je minimalan.

MOBI metoda

Ova metoda takođe nalazi optimalno rešenje na osnovu ranije dobijenog početnog baznog rešenja pomoću neke od prethodno navedenih metoda. Relativni troškovi k_{ij} računaju se po formuli

$$k_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$$

gde su c_{ij} jedinični troškovi, dok su u_i i v_j koeficijenti za svako bazno rešenje vrednosti koji se dobijaju iz formule $c_{ij} = u_i + v_j$ nad zauzetim poljim.

Radi ilustracije, ponovo ćemo uzeti da je bazno rešenje za primer dobijeno metodom severozapadnog ugla.

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona
M_1	20 **2**	11	15	13	**2**
M_2	17 **1**	14 **3**	12 **2**	13	**6**
M_3	15	12	18 **2**	18 **5**	**7**
Br.potreb.kamiona	**3**	**3**	**4**	**5**	**15/15**

Vidimo da su zauzeta polja (1,1), (2,1), (2,2), (2,3), (3,3) i (3,4). Dakle rešavamo sistem

$$\begin{aligned} c_{11} &= u_1 + v_1 \\ c_{21} &= u_2 + v_1 \\ c_{22} &= u_2 + v_2 \\ c_{23} &= u_2 + v_3 \\ c_{32} &= u_3 + v_2 \\ c_{34} &= u_3 + v_4 \end{aligned}$$

Neka je, npr. $u_1 = 0$. Rešavamo sistem, dobićemo da je

$$u_2 = -3, u_3 = 3$$

$$v_1 = 20, v_2 = 17, v_3 = 15, v_4 = 15$$

Pomoću formula $k_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$ ocenićemo relativne troškove za nezauzeta polja. Promena baze obavlja se analogno prethodnoj metodi.

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona	u_i
M_1	20 **2**	11 **-6**	15 0	13 -2	**2**	**0**
M_2	17 **1**	14 **3**	12 **2**	13 **1**	**6**	**-3**
M_3	15 -8	12 -8	18 **2**	18 **5**	**7**	**3**
Br.potreb.kamiona	**3**	**3**	**4**	**5**	**15/15**	
v_j	**20**	**17**	**15**	**15**	**-**	**-**

$Z = 20 \cdot 2 + 17 \cdot 1 + 14 \cdot 3 + 12 \cdot 2 + 18 \cdot 2 + 18 \cdot 5 = 249$ minuta.

Menjmo bazu nad poljem (3,2). Drugo bazno rešenje je

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona	u_i
M_1	20 **2**	11 **-6**	15 0	13 -10	**2**	**0**
M_2	17 **1**	14 **1**	12 **4**	13 **-7**	**6**	**-3**
M_3	15 0	12 2	18 **8**	18 **5**	**7**	**-5**
Br.potreb.kamiona	**3**	**3**	**4**	**5**	**15/15**	
v_j	**20**	**17**	**15**	**23**	**-**	**-**

Vidimo da bazu čine polja (1,1), (2,1), (2,2), (2,3), (3,2) i (3,4). Dakle rešavamo sistem

$$c_{11} = u_1 + v_1 \qquad c_{22} = u_2 + v_2 \qquad c_{32} = u_3 + v_2$$
$$c_{21} = u_2 + v_1 \qquad c_{23} = u_2 + v_3 \qquad c_{34} = u_3 + v_4$$

Neka je, npr. $u_1 = 0$. Rešavamo sistem, dobićemo da je

$$u_2 = -3, u_3 = -5$$
$$v_1 = 20, v_2 = 17, v_3 = 15, v_4 = 23$$

Ponovo računamo relativne troškove:

$$k_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 11 - 0 - 17 = -6$$
$$k_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 15 - 0 - 15 = 0$$
$$k_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 13 - 0 - 23 = -10$$
$$k_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 13 — 3 - 23 = -7$$
$$k_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 15 - 20 — 5 = 0$$
$$k_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 18 — 5 - 15 = 8$$

Primetimo da ponovo imamo negativnih relativnih troškova. Biramo (1,4) polje za ulazak u bazu. Kamen ima vrednost 1. Treće bazno rešenje

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona	u_i
M_1	20 **1**	11 **4**	15 0	13 1	**2**	**0**
M_2	17 **2**	14 **4**	12 **4**	13 **-3**	**6**	**-3**
M_3	15 -10	12 3	18 **-2**	18 **4**	**7**	**5**
Br.potreb.kamiona	**3**	**3**	**4**	**5**	**15/15**	
v_j	**20**	**7**	**15**	**13**	**-**	**-**

$Z = 20 \cdot 2 + 17 \cdot 1 + 14 \cdot 1 + 12 \cdot 4 + 12 \cdot 2 + 18 \cdot 5 = 233$ minuta.

$$c_{12} = u_1 + v_2$$
$$c_{13} = u_1 + v_3$$
$$c_{22} = u_2 + v_2$$
$$c_{24} = u_2 + v_4$$
$$c_{31} = u_3 + v_1$$
$$c_{33} = u_3 + v_3$$

Neka je, npr. $u_1 = 0$.

Rešavamo sistem, $u_2 = -3, u_3 = 5$

$$v_1 = 20, v_2 = 7, v_3 = 15, v_4 = 13$$

Ponovo računamo relativne troškove kao i u prethodnoj iteraciji. Polje (4,1) ulazi u bazu.

Četvrto bazno rešenje

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona	u_i
M_1	20 **10**	11 **7**	15 10	13 2	**2**	**0**
M_2	17 **2**	14 **0**	12 **4**	13 **-7**	**6**	**7**
M_3	15 1	12 3	18 **8**	18 **3**	**7**	**5**
Br.potreb.kamiona	**3**	**3**	**4**	**5**	**15/15**	
v_j	**10**	**7**	**5**	**13**	**-**	**-**

$Z = 213$ minuta

$$c_{11} = u_1 + v_1$$
$$c_{12} = u_1 + v_2$$
$$c_{13} = u_1 + v_3$$
$$c_{21} = u_2 + v_2$$
$$c_{24} = u_2 + v_4$$
$$c_{33} = u_3 + v_3$$

Neka je npr. $u_1 = 0$. Rešavamo sistem i računamo relativne troškove. Rezultati su u tabeli.

Primetimo da je $k_{24} = -7 < 0$. Polje (2,4) ulazi u bazu. Kamen ima vrednost 2.

Peto bazno rešenje

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona	u_i
M_1	20 **10**	11 **4**	15 3	13 2	**2**	**0**
M_2	17 **7**	14 **7**	12 **4**	13 **2**	**6**	**0**
M_3	15 3	12 3	18 **1**	18 **1**	**7**	**5**
Br.potreb.kamiona	**3**	**3**	**4**	**5**	**15/15**	
v_j	**10**	**7**	**12**	**13**	**-**	**-**

$$Min\ Z = 199 \text{ minuta}$$

$$x_{14} = 2, x_{23} = 4, x_{24} = 2, x_{31} = 3, x_{32} = 3, x_{34} = 1.$$

Budući da su svi pripadajući relativni troškovi na nezauzetim poljima u matrici transporta pozitivni, peto bazno rešenje je ujedno i optimalno rešenje.

Najmanje moguće vreme "prazne vožnje" iznosi 199 minuta dnevno.

Otvoreni transportni problem

Pretpostavimo da je magacin M_1 iz prethodnog primera nabavio 3 dodatna kamiona. Interesuje nas kako takva promena utiče na optimalno rešenje posmatranog problema.

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona
M_1	20 x_{11}	11 x_{12}	15 x_{13}	13 x_{14}	**5**
M_2	17 x_{21}	14 x_{22}	12 x_{23}	13 x_{24}	**6**
M_3	15 x_{31}	12 x_{32}	18 x_{33}	18 x_{33}	**7**
Br.potreb.kamiona	**3**	**3**	**4**	**5**	**15/18**

Rešenje:
Ovakva promena dovodi do situacije da imamo 18 raspoloživih kamiona dok je potražnja nepromenjena. Dakle, postoji neravnoteža između ponude i potražnje. Otvoreni transportni problem se prvo prevodi na zatvoreni transportni problem a zatim rešava pomoću već opisanih metoda.
Potrebno je da uvedemo fiktivni izložbeni prostor koji ima troškove dostave jednake nuli i potražnju od 3 kamiona dnevno. Nova transportna tablica ima sledeći oblik

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Broj raspolož. kamiona
M_1	20 x_{11}	11 x_{12}	15 x_{13}	13 x_{14}	0 x_{15}	**5**
M_2	17 x_{21}	14 x_{22}	12 x_{23}	13 x_{24}	0 x_{16}	**6**
M_3	15 x_{31}	12 x_{32}	18 x_{33}	18 x_{33}	0 x_{17}	**7**
Br.potreb.kamiona	**3**	**3**	**4**	**5**	**3**	**18/18**

Postupak rešavanja je analogan rešavanju zatvorenog transportnog problema. U ovom slučaju za početni program korištena je metoda najmanjih troškova, a za poboljšanje početnog programa i dobijanje optimalnog rešenja MODI-metoda.

Početno bazno rešenje metodom najmanjih troškova:

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Broj raspolož. kamiona	u_i
M_1	20 6	11 2	15 -1	13 -4	0 3	**5**	**0**
M_2	17 7	14 7	12 4	13 2	0 4	**6**	**-4**
M_3	15 3	12 1	18 1	18 3	0 -1	**7**	**1**
Br.potreb.kamiona	**3**	**3**	**4**	**5**	**3**	**18/18**	
v_j	**14**	**11**	**16**	**17**	**0**		

Vreme transporta $Z = 207$ minuta. Bazu čine polja (1,2), (1,5), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4). Računamo odmah i relativne troškove, npr. $u_1 = 0$. Videćemo da $k_{14} = -4$ ima najmanju vrednost, ulazi u bazu (1,4).

Drugo bazno rešenje:

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Broj raspolož. kamiona	u_i
M_1	20 10	11 4	15 3	13 2	0 3	**5**	**0**
M_2	17 7	14 7	12 4	13 2	0 0	**6**	**0**
M_3	15 3	12 3	18 1	18 1	0 -5	**7**	**5**
Br.potreb.kamiona	**3**	**3**	**4**	**5**	**3**	**18/18**	
v_j	**10**	**7**	**12**	**13**	**0**		

Vreme transporta $Z = 199$ minuta. Analogno prethodnom postupku dobijamo treće bazično rešnje

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Broj raspolož. kamiona	u_i
M_1	20 5	11 -1	15 3	13 3	0 2	**5**	**0**
M_2	17 2	14 2	12 4	13 2	0 0	**6**	**0**
M_3	15 3	12 3	18 6	18 5	0 1	**7**	**0**
Br.potreb.kamiona	**3**	**3**	**4**	**5**	**3**	**18/18**	
v_j	**15**	**12**	**12**	**13**	**0**		

Vreme transporta je $Z = 194$ minuta. Nismo stigli do optimalnog rešenja, tražimo četvrto bazično rešenje.

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	Broj raspolož. kamiona	u_i
M_1	20 6	11 2	15 3	13 3	0 1	**5**	**0**
M_2	17 3	14 3	12 4	13 2	0 1	**6**	**0**
M_3	15 3	12 1	18 5	18 4	0 3	**7**	**1**
Br.potreb.kamiona	**3**	**3**	**4**	**5**	**3**	**18/18**	
v_j	**14**	**11**	**12**	**13**	**-1**		

Poslednje rešenje je ujedno i optimalno rešenje.

Vreme transporta iznosi $Z = 192$ minuta i postiže se za $x_{12} = 2, x_{14} = 3, x_{23} = 4, x_{24} = 2, x_{31} = 3, x_{32} = 1, x_{35} = 3$. Obzirom da je 5.izložbeni prostor fiktivan i da se nekoristi, za tri planirana kamiona bi trebalo naći drugi posao.

PRIMER 51

Rešiti transportni problem dat matrično.

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona
M_1	2 x_{11}	8 x_{12}	4 x_{13}	6 x_{14}	**120**
M_2	3 x_{21}	2 x_{22}	5 x_{23}	2 x_{24}	**30**
M_3	6 x_{31}	5 x_{32}	8 x_{33}	7 x_{33}	**70**
Br.potreb.kamiona	**30**	**90**	**80**	**20**	**320/320**

Rešenje:

Određivanje početnog bazičnog rešenja metodom severozapadnog ugla

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona
M_1	2 30	8 90	4	6	**120**
M_2	3	2	5 30	2	**30**
M_3	6	5	8 50	7 20	**70**
Br.potreb.kamiona	**30**	**90**	**80**	**20**	**320/320**

Nalaženje optimalno rešenja metodom MOBI

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona	u_i
M_1	2 30	8 90	4 -7	6 -4	**120**	**0**
M_2	3 7	2 0	5 30	2 -2	**30**	**-6**
M_3	6 7	5 0	8 50	7 20	**70**	**-3**
Br.potreb.kamiona	**30**	**90**	**80**	**20**	**320/320**	
v_j	**2**	**8**	**11**	**10**		

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona	u_i
M_1	2 30	8 90	4 -7	6 -4	**120**	**0**
M_2	3 7	2 0	5 30	2 -2	**30**	**-6**
M_3	6 7	5 0	8 50	7 20	**70**	**-3**
Br.potreb.kamiona	**30**	**90**	**80**	**20**	**320/320**	
v_j	**2**	**8**	**11**	**10**		

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona	u_i
M_1	2 / 30	8 / 60	4 / 30	6 / 3	**120**	**0**
M_2	3 / 7	2 / 30	5 / 7	2 / 5	**30**	**-6**
M_3	6 / 0	5 / -7	8 / 50	7 / 20	**70**	**4**
Br.potreb.kamiona	**30**	**90**	**80**	**20**	**320/320**	
v_j	**2**	**8**	**4**	**3**		

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona	u_i
M_1	2 / 30	8 / 10	4 / 80	6 / -4	**120**	**0**
M_2	3 / 7	2 / 30	5 / 7	2 / -2	**30**	**-6**
M_3	6 / 7	5 / 50	8 / 6	7 / 20	**70**	**-3**
Br.potreb.kamiona	**30**	**90**	**80**	**20**	**320/320**	
v_j	**2**	**8**	**4**	**10**		

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona	u_i
M_1	2 / 30	8 / 4	4 / 80	6 / 10	**120**	**0**
M_2	3 / 3	2 / 30	5 / 3	2 / -2	**30**	**-2**
M_3	6 / 3	5 / 60	8 / 3	7 / 10	**70**	**1**
Br.potreb.kamiona	**30**	**90**	**80**	**20**	**320/320**	
v_j	**2**	**4**	**4**	**6**		

Utovarno mesto Terminal	T_1	T_2	T_3	T_4	Broj raspolož. kamiona	u_i
M_1	2 / 30	8 / 2	4 / 80	6 / 10	**120**	**0**
M_2	3 / 5	2 / 20	5 / 5	2 / 10	**30**	**-4**
M_3	6 / 5	5 / 70	8 / 5	7 / 2	**70**	**-1**
Br.potreb.kamiona	**30**	**90**	**80**	**20**	**320/320**	
v_j	**2**	**6**	**4**	**6**		

Poslednje rešenje je ujedno i optimalno. Vrednost funkcije je

$$Z = 2 \cdot 30 + 4 \cdot 80 + 6 \cdot 10 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 70 = 850$$

i postiže se za $x_{11} = 30, x_{13} = 80, x_{14} = 10, x_{22} = 20, x_{24} = 10, x_{32} = 70$.

PRIMER 52

Elektroprivreda Srbije želi da izgradi nove tri elektrane koje će obezbediti struju za 4 opštine. Elektrane mogu da proizvedu izraženo u milionima kilovat-časova (kwh) 35, 50 i 40. U trenutcima najveće potrošnje, ove opštine troše 45, 20, 30 i 30 miliona kilovat časova. Troškovi distribucije 1 miliona kwh struje od elektrane do opštine zavisi od njihovog međusobnog rastojanja. Formulisati LP problem za minimizaciju troškova distribucije struje u periodu kada je potražnja najveća. Cena distribucije struje od elektrana do opštine data je u narednoj tabeli.

	Potrošač	**Količina proizvedene struje**			
	Opština 1	Opština 2	Opština 3	Opština 4	
Elektrana 1	8	6	10	9	35
Elektrana 2	9	12	13	7	50
Elektrana 3	14	9	16	5	40
Potražnja struje	45	20	30	30	

REŠENJE

Neka je sa x_{ij} obeležena količina struje (izražena u milionima kwh) koja je proizvedena u elektrani i a koja se prosleđuje ka opštini j. Ukupni troškovi mogu se zapisati na sledeći način

$8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14}$ (cena distribucije struje iz Elektrane 1)

$+9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24}$ (cena distribucije struje iz Elektrane 2)

$+14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34}$ (cena distribucije struje iz Elektrane 3)

Uz ograničenja koja se odnose na maksimalnu proizvodnju

Prva elektrana može proizvesti najviše 35 mil.kwh struje, dakle

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35$$

Slično za drugu i treću elektranu

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40$$

Dalje, imam zahteve opština. Prva opština ima potrebu za 45 mil kwh struje bez obzira odakle će ta struja doći, dakle

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 45$$

Analogno za preostale 3 opštine.

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 20$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 30$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 30$$

Kako su svi zahtevi nenegativne veličine imamo još i ograničenje

$$x_{ij} \geq 0, \forall i, j.$$

Konačno, matematički model je:

$$\min\ 8x_{11} + 6x_{12} + 10x_{13} + 9x_{14} + 9x_{21} + 12x_{22} + 13x_{23} + 7x_{24} + 14x_{31} + 9x_{32} + 16x_{33} + 5x_{34}$$

pri ograničenjima

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 35$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 50$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 40$$
$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 45$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 20$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 30$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} \geq 30$$
$$x_{ij} \geq 0, \forall i, j.$$

Primetićemo da je ovo zatvoreni transportni problem obzirom da je potražnja struje jednaka onoj količini koju elektrane mogu da proizvedu.

Kako se rešava problem u kome je potražnja manja od maksimalne proizvodnje?

Pretpostavimo da opština 1 u trenutku maksimalne potrošnje, ima potrebe za najviše 40 mil. kwh. Postavlja se pitanje koja elektrana neće proizvoditi tih 5 mil.kwh viška obzirom da nema potrebe za tom količinom struje.

Problem se rešava uvođenjem fiktivne opštine 5 koja će “zahtevati” tih 5 mil.kwh “viška” takva da je distribucija struje ka toj opštini besplatna.

Matrica transporta imaće sledeći oblik

	Potrošač		**Količina proizvedene struje**			
	Opština 1	Opština 2	Opština 3	Opština 4	Opština 5	
Elektrana 1	8	6	10	9	0	35
Elektrana 2	9	12	13	7	0	50
Elektrana 3	14	9	16	5	0	40
Potražnja struje	40	20	30	30	5	

Kako se rešava problem u kome je proizvodnja manja od potražnje?

Na primer elektrana 1 može da proizvede najviše 30 mil.kwh? Ovakav zadatak nema dopustivog rešenja, ali se može poput prethodne situacije uvesti fiktivna elektrana koja će proizvesti tu količinu struje koja nedostaje uz neke dodatne troškove.

Zatvoreni transportni problem rešavamo metodom najmanjih cena

Opštine / Elektrana	O_1	O_2	O_3	O_4	Količina proizvedene struje
E_1	8 / 25	6 / 10	10	9	**35**
E_2	9 / 20	12	13 / 30	7	**50**
E_3	14	9 / 10	16	5 / 30	**40**
Potražnja struje	**45**	**20**	**30**	**30**	**125/125**

Rešenje popravaljamo metodom skakanja s’ kamena na kamen.

Formiramo lanac za svako od polja (1,3), (1,4), (2,2), (2,4), (3,1), (3,3):

$$k_{13} = c_{13} - c_{23} + c_{21} - c_{11} = 10 - 13 + 9 - 8 = -2$$
$$k_{14} = c_{14} - c_{34} + c_{32} - c_{12} = 9 - 5 + 9 - 6 = 7$$
$$k_{22} = c_{22} - c_{21} + c_{11} - c_{12} = 12 - 9 + 8 - 6 = 5$$
$$k_{24} = c_{24} - c_{34} + c_{32} - c_{12} + c_{11} - c_{21} = 7 - 5 + 9 - 6 + 8 - 9 = 4$$
$$k_{31} = c_{31} - c_{32} + c_{12} - c_{11} = 14 - 9 + 6 - 8 = 3$$
$$k_{33} = c_{33} - c_{32} + c_{12} - c_{11} - c_{21} + c_{23} = 16 - 9 + 6 - 8 + 9 - 13 = 1$$

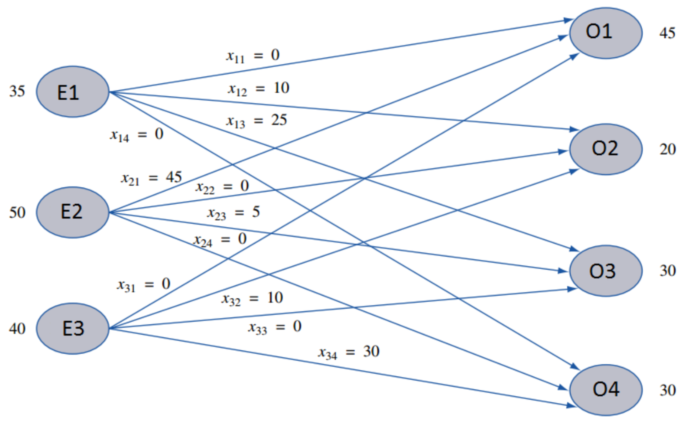
Polje koje ima najmanju vrednost je polje (1,3). Kamen iznosi $\min\{30,25\} = 25$. To polje ulazi u bazu, polje (1,1) izlazi iz baze. Nova tablica je oblika (ujedno ćemo izračunati i relativne troškove).

Opštine / Elektrana	O_1	O_2	O_3	O_4	Količina proizvedene struje
E_1	8 / 2	6 / 10	10 / 25	9 / 7	**35**
E_2	9 / 45	12 / 3	13 / 5	7 / 2	**50**
E_3	14 / 5	9 / 10	16 / 3	5 / 30	**40**
Potražnja struje	**45**	**20**	**30**	**30**	**125/125**

Kako su svi relativni troškovi pozitivne vrednosti, sledi da je poslednje dobijeno rešenje ujedno i optimalno. Dakle, elektrana E1 snabdevaće opštine 2 i 3 sa po 10 i 25 mil.kwh u trenutku maksimalne potrošnje, elektrana E2 snabdevaće opštine 1 i 3 sa po 45 i 5 mil.kwh struje u trenutku maksimalne potrošnje, dok će elektrana E3 snabdevati opštine 2 i 4 sa po 10 i 30 mil.kwh.

Ukupni troškovi iznose $Z = 6 * 10 + 10 * 25 + 9 * 45 + 13 * 5 + 9 * 10 + 5 * 30 = 1.020$

Distribucija struje može se i grafički prikazati.



PRIMER 53

Dva velika rezervoara su jedini distributeri vode u 3 grada. Svaki od rezervoara dnevno distribuira najviše 50mil galona vode. Svaki od gradova dnevno potroši najviše 40 mil galona vode. Za svaki milion galona vode koja se ne dopremi krši se ugovor o distribuiji vode i moraju se platiti dodatni troškovi. Prvom gradu plaća se 20 eur, dok drugom gradu 22 eur, a trećem 23 eur. Cena distribucije vode od rezervoara do grada po 1 mil.galonu vode data je u tabeli. Formulisati zatvoreni transportni problem za minimizaciju troškova distribucije vode.

	Grad1	Grad2	Grad3
Rezervoar 1	7	8	10
Rezervoar 2	9	7	8

REŠENJE

Dnevna distribucija vode iznosi $50 + 50 = 100$ mil.galona vode

Dnevna potražnja vode iznosi $40 + 40 + 40 = 120$ mil.galona vode.

Da bi se problem preveo na zatvoren transportni problem, potrebno je da se doda fiktivni distributer koji će nadoknaditi manjak vode po “kaznenim” cenama. Sledi tabela zatvorenog transportnog problema

	Grad1	Grad2	Grad3	
Rezervoar 1	7	8	10	50
Rezervoar 2	9	7	8	50
Rezervoar 3	20	22	23	20
	40	40	40	

Problem se rešava analogno prethodnom zadatku.

Metodom severozapadnog ugla dobijamo sledeću bazu

	G_1	G_2	G_3	
R_1	7 40	8 -1	10 10	**50**
R_2	9 4	7 40	8 10	**50**
R_3	20 0	22 0	23 20	**20**
	40	**40**	**40**	**125/120**

Vidimo da dobijeno rešenje nije optimalno. Primenimo MOBI metodu

	G_1	G_2	G_3		u_i
R_1	7 40	8 -1	10 10	**50**	**0**
R_2	9 4	7 40	8 10	**50**	**-2**
R_3	20 3	22 3	23 20	**20**	**10**
	40	**40**	**40**	**125/120**	
v_j	**7**	**9**	**10**		

Polje (1,2) ulazi u bazu dok polje (1,3) izlazi iz baze.

	G_1	G_2	G_3		u_i
R_1	7 / 40	8 / 10	10 / 1	**50**	0
R_2	9 / 3	7 / 30	8 / 20	**50**	-1
R_3	20 / -4	22 / 0	23 / 20	**20**	14
	40	**40**	**40**	**125/120**	
v_j	7	8	9		

Imamo negativne relativne troškove, sledi da (3,1) ulazi u bazu, dok (3,3) izlazi iz baze ($\min\{20,30,40\}$).

	G_1	G_2	G_3		u_i
R_1	7 / 20	8 / 30	10 / 1	**50**	0
R_2	9 / 3	7 / 10	8 / 40	**50**	-1
R_3	20 / 20	22 / 0	23 / 0	**20**	14
	40	**40**	**40**	**125/120**	
v_j	7	8	9		

Dobili smo optimalno rešenje. Postojanje nula među relativnim troškovima nam govori da problem ima više optimalnih rešenja. Vrednost funkcije troškova distribucije vode iznosi $Z = 7*20 + 8*30 + 7*10 + 8*40 + 20*20 = 1090$.

PRIMER 54

Ponovo posmatramo problem 51.

a) Odrediti opseg promene cene distribucije 1 mil. kwh struje od elektrane E1 do opštine O1 tako da dobijeno rešenje ostane optimalno.
b) Odrediti opseg promene cene distribucije 1 mil. kwh struje od elektrane E1 do opštine O3 tako da dobijeno rešenje ostane optimalno.
c) Kako se optimalno rešenje menja ako se elektrana E1 poveća svoje kapacitete za 2mil. kwh dnevno a opština O2 poveća svoju potrošnju za takođe 2 mil.kwh dnevno?
d) Kako se optimalno rešenje menja ako se elektrana E1 poveća svoje kapacitete za 1mil. kwh dnevno a opština O1 poveća svoju potrošnju za takođe 1 mil.kwh dnevno?

REŠENJE

a) Pretpostavimo da se cena distribucije menja za neku vrednost Δ, tj. $c_{11} = 8 + \Delta$.

Ako uzmemo da je poslednje dobijeno rešenje naša baza, zanima nas da li će se ona promeniti, npr. MODI metodom

Opštine / Elektrana	O_1	O_2	O_3	O_4	Količina proizvedene struje	u_i
E_1	8+Δ / 2+Δ	6 / 10	10 / 25	9 / 7	35	**0**
E_2	9 / 45	12 / 3	13 / 5	7 / 2	50	**3**
E_3	14 / 5	9 / 10	16 / 3	5 / 30	40	**3**
Potražnja struje	**45**	**20**	**30**	**30**	**125/125**	
v_j	**6**	**6**	**10**	**2**		

Dakle, za $2 + \Delta \geq 0$ sledi da se optimalno rešenje neće menjati, odnosno svako smanjenje cene distribucije cene za najviše 2 neće uticati na dat raspored, tj. svaki izbor cene $c_{11} \in [6, +\infty)$ ne utiče na optimalno rešenje.

b) Pretpostavimo ponovo da se cena distribucije menja za neku vrednost Δ, tj. $c_{13} = 10 + \Delta$.

Jednakost $c_{13} = 0$ menja vrednost vektorima u_i i v_j pa tako umesto $u_1 + v_3 = 10$ imamo $u_1 + v_3 = 10 + \Delta$. Rešavamo novi sistem.

$$u_1 = 0 \qquad u_2 + v_3 = 13 \qquad u_3 + v_4 =$$
$$u_2 + v_1 = 9 \qquad u_3 + v_2 = 9$$
$$u_1 + v_2 = 6 \qquad u_1 + v_3 = 10 + \Delta$$

Rešenje je dato u tabeli, računamo odmah i relativne troškove.

Opštine / Elektrana	O_1	O_2	O_3	O_4	Količina proizvedene struje	u_i
E_1	8 / $2-\Delta$	6 / 10	10 / 25	9 / 7	**35**	**0**
E_2	9 / 45	12 / $3+\Delta$	13 / 5	7 / $2+\Delta$	**50**	**$3-\Delta$**
E_3	14 / $5-\Delta$	9 / 10	16 / $3-\Delta$	5 / 30	**40**	**3**
Potražnja struje	**45**	**20**	**30**	**30**	**125/125**	
v_j	**$6+\Delta$**	**6**	**$10+\Delta$**	**2**		

Ukoliko su svi relativni troškovi nenegativne vrednosti, optimalno rešenje ostaje nepromenjeno.

$$\begin{aligned} 2-\Delta &\geq 0, \\ 3+\Delta &\geq 0, \\ 2+\Delta &\geq 0, \\ 5-\Delta &\geq 0, \\ 3-\Delta &\geq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \Delta &\leq 2, \\ \Delta &\geq -3, \\ \Delta &\geq -2, \\ \Delta &\leq 5, \\ \Delta &\leq 3 \end{aligned}$$

Za $-2 \leq \Delta \leq 2$ optimalno rešenje ostaje nepromenjeno, odnosno za svaki izbor cene $c_{13} \in [8,12]$.

c) Rešenje je dato u tablici. Kako je polje (1,2) bazično, njegova vrednost će se uvećati za 2.

Opštine / Elektrana	O_1	O_2	O_3	O_4	Količina proizvedene struje	u_i
E_1	8 / 2	6 / 12	10 / 25	9 / 7	**37**	**0**
E_2	9 / 45	12 / 3	13 / 5	7 / 2	**50**	**3**
E_3	14 / 5	9 / 10	16 / 3	5 / 30	**40**	**3**
Potražnja struje	**45**	**22**	**30**	**30**	**125/125**	
v_j	**6**	**6**	**10**	**2**		

Vidimo da je optimalno rešenje novog problema $Z = 1.020 + 2u_1 + 2v_2 = 1.032$

e) Primetimo da bi sada polje (1,1) moralo da uđe u bazu i da bi imalo vrednost 1.

Stavićemo da je "kamen" vrednosti 1, odnosno napravićemo lanac (1,1)-(1,3)-(2,3)-(2,1). Na ovaj način poljima (1,3), (2,1) dodajemo kamen, dok ga poljima (1,1) i (2,3) oduzimamo.

Opštine / Elektrana	O_1	O_2	O_3	O_4	Količina proizvedene struje	u_i
E_1	8	6 / 10	10 / 26	9 / 7	**36**	**0**
E_2	9 / 46	12 / 3	13 / 4	7 / 2	**50**	**3**
E_3	14 / 5	9 / 10	16 / 3	5 / 30	**40**	**3**
Potražnja struje	**46**	**20**	**30**	**30**	**125/125**	
v_j	**6**	**6**	**10**	**2**		

ZADACI ZA VEZBU

ZADATAK 1

Kompanija Sinalko ima svoja skladišta u 4 grada (Beograd - BG, Novi Sad - NS, Niš – NI i Subotica - SU) u kojima se mogu nabaviti sokovi od 2 litra pri čemu je nabavna cena (nc) jedne gajbe soka 10 eur, i na skladištima ima po 500, 400, 700, 600 gajbi soka. U 5 gradova postoje velikoprodajni objekti čiji vlasnik prodaje gajbe soka po prodajnoj ceni (pc) od 20 eur, a troškove transporta soka iz Sinalkovih skladišta sam plaća. Sokovi se trasportuju kamionima u koje staje po 50 gajbi. Troškovi transporta po jednom kamionu na svim relacijama i tražnja (broj gajbi) su dati u tabeli:

	VALJEVO	LJIG	ČAČAK	KURŠUMLIJA	ZAJEČAR
BG	100	150	200	300	350
NS	150	200	250	400	450
NI	350	300	200	100	200
SU	200	250	300	450	400
Tražnja	500	400	450	600	450

a) Odrediti početno rešenje problema

b) Odrediti optimalan plan transporta i obrazložiti ga

c) Veleprodaja iz Valjeva ima takav ugovor koji zahteva da nabavi podjednak broj gajbi soka u Beogradu i Novom Sadu. Naći optimal plan transporta koji zadovoljava ovaj zahtev;

d) Odrediti optimalan plan trasnporta u slučaju raskida ugovora između veleprodaje iz Valjeva i skladišta iz Beograda.

e) Primenom "Mađarske" metode odrediti optimalni plan transporta, ako se zahteva da se na svakoj se iz jednog skaldišta transportuje samo do jedne veleprodaje (tražnja treba da bude zadovoljena u potpunosti) i da se jedna veleprodaja snabdeva iz jednog skladišta i uporediti dobijeno rešenje (dobit) sa rešenjem pod b).

ZADATAK 2

GSP raspolaže sa 3 garaže iz kojih polazi 15 autobusa na 4 različite polazne stanice određenih gradskih linija. Podaci o broju autobusa kojima raspolažu pojedine garaže i broju autobusa koje treba uputiti na pojedine polazne stanice su sledeći:

Garaža G1 raspolaže sa 2 autobusa
Garaža G2 raspolaže sa 6 autobusa
Garaža G3 raspolaže sa 7 autobusa

1. stanicu treba da obiđe min 3 autobusa
2. stanicu 3 autobusa
3. stanicu 4 autobusa
4. 4 stanicu 5 autobusa

Troškovi vožnje od pojedine garaže do određene polazne stanice prikazani su u sledećoj tabeli.

Polazne stanice / Garaže	S1	S2	S3	S4	raspoloživ broj autobusa u garaži
G1	20	11	15	13	**2**
G2	17	14	12	13	**6**
G3	15	12	18	18	**7**
Potreban broj autobusa na polaznoj stanici	**3**	**3**	**4**	**5**	**15**

Autobuse treba raspodeliti tako da se zadovolje potrebe svih polaznih stanica uz minimalne troškove.

ZADATAK 3

Naći optimalno rešenje transportnog zadatka, i pokazati da postoje još dva optimalna rešenja:

8	**10**	**4**	**5**	20
6	4	7	3	50
5	8	9	6	25
11	9	10	8	75
30	35	60	45	

ZADATAK 4

Iz tri mlina potrebno je transportovati brašno u tri pekare.

Udaljenost mlinova od pekara, ponuda mlinova i potražnja pekara u tonama su dati u tabeli

	Pekara 1	**Pekara 2**	**Pekara 3**	**Ponuda**
Mlin1	40	60	90	**40**
Mlin 2	60	80	70	**25**
Mlin 3	50	50	100	**50**
Potražnja	**20**	**45**	**30**	

a) Pod pretpostavkom da jedinični troškovi transporta u

P1 iznose $0.3k_{i1} + 10\ (i = 1, 2, 3)$, u

P2 $0.25k_{i2} + 20, (i = 1, 2, 3)$ i u

P3 $0.2k_{i3} + 15, (i = 1, 2, 3)$

odrediti i objasniti optimalan plan transporta brašna i izračunati ukupne troškove transporta,

b) Odrediti optimalan plan transporta pod uslovom da nije dozvoljen transport iz M1 u P3

ZADATAK 5

Jedna pekara raspolaže sa 4 vrste brašna (V1, V2, V3 i V4), i to 650kg V1, 550kg V2, 500kg V3 i 600kg V4. Potrebno je odrediti količine brašna za proizvodnju hleba (P1), kifli (P2), pogača (P3), đevreka (P4) i pereca (P5) ako se njihovu proizvodnju može upotrebiti 500kg, 450kg, 500kg, 600kg i 500kg respektivno.

Dobit po kg upotrebljenog brašna

prve vrste V1 je 2, 7, 5, 8 i 6 din. respektivno

druge vrste V2 je 7, 2, 6, 4, i 10 din. respektivno

treće vrste V3 je 4, 6, 9, 6 i 4 din respektivno

četvrte vrste V4 je 5, 4, 2, 5 i 2 din respektivno.

a) Formulisati matematički model kojim se određuje koliko i koje vrste brašna treba
b) Odrediti početno rešenje i napisati redosled dodeljivanja vrednosti baznim promenljivim, kao i zašto je promenljiva postala bazična;
c) Odrediti i obrazložiti optimalni plan transporta;
d) Odrediti drugo marginalno rešenje i napisati sva optimalna rešenja problema ;
e) Odrediti ono optimalo rešenje koje obezbeđuje da se upotrebi tačno 500kg druge vrste brašna za proizvodnju đevreka;
f) Odrediti da li bi došlo i do kojih promena plana ako se jedinična dobit od proizvodnje hleba od druge vrste brašna smanji za 5 din. usled smanjenja njegove tražnje.

PROBLEM RASPOREĐIVANJA

PRIMER 55

Odrediti optimalni raspored za sledeći problem

	A	B	C	D	E
1	10	4	6	10	12
2	11	7	7	9	14
3	13	8	12	14	15
4	14	16	13	17	17
5	17	11	17	20	19

Rešenje:

Iz svake vrste odredimo minimalnu vrednost. U prvoj vrsti minimalna vrednost je 4, u drugoj 7, u trećoj 8 i tako redom. Od polazne matrice oduzimamo matricu čije su vrste formirane na sledeći način: prva vrsta predstavlja vektor čije su vrednosti 4, druga vrsta vektor čije su vrednosti jednake 7, treća vrsta je vektor vrednosti 8 i tako redom:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix} & \begin{bmatrix} 10 & 4 & 6 & 10 & 12 \\ 11 & 7 & 7 & 9 & 14 \\ 13 & 8 & 12 & 14 & 15 \\ 14 & 16 & 13 & 17 & 17 \\ 17 & 11 & 17 & 20 & 19 \end{bmatrix} \end{array} - \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix} & \begin{bmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 7 & 7 & 7 & 7 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \\ 13 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 11 & 11 & 11 & 11 & 11 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix} & \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 6 & 0 & 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \end{array}$$

Zatim se u svakoj koloni odredi najmanja vrednost i od poslednje matrice oduzima matrica formirana tako da prva kolona predstavlja vektor vrednosti koje su jednake najmanjoj vrednosti te kolone, druga kolona predstavlja vektor vrednosti koje su jednake najmanjoj vrednosti druge kolone i tako redom. Najmanje vrednosti u svakoj koloni su sledeće: U prvoj koloni najmanja vrednost je 1, u drugoj 0, u trećoj 0, u četvrtoj 2, u petoj 4.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix} & \begin{bmatrix} 6 & 0 & 2 & 6 & 8 \\ 4 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 5 & 0 & 4 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 0 & 4 & 4 \\ 6 & 0 & 6 & 9 & 8 \end{bmatrix} \end{array} - \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix} \end{array}$$

U poslednjoj matrici određujemo bazne i nebazne nule. U prvoj vrsti imamo samo jednu nulu, nju ćemo progralisti za baznu (ostale nule kolone B proglašavamo za nebazne). U kolonama A i E imamo samo po jednu nulu, ako neku od njih proglasimo za baznu, druga će postati nebazna. Ostale sun am nule na pozicijama C2 i D2. Neka je nula na poziciji C2 bazna, nula na poziciji D2 će biti nebazna. Sve nule iz matrices u proglašene kao bazne ili nebazne. Ukupno imamo 3 bazne nule a rang matrice je 5. Postupak određivanja rasporeda se nastavlja. U tabeli niže su bazne nule podebljane dok su nebazične nule osenčene sivom bojom.

	A	B	C	D	E
1	5	**0**	2	4	4
2	3	0	**0**	0	3
3	4	0	4	4	3
4	**0**	3	0	2	0
5	5	0	6	7	4

Među neosenčenim poljima određujemo najmanju vrednost: $\min\{5,2,4,4,4,3,5,6,7,4\} = 2$ a zatim se od svake neprecrtane vrste oduzima vektor čiji su svi elementi jednaki broju 2, a precrtanim kolonama dodaje vektor čije su vrednosti jednake 2:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix} & \begin{bmatrix} 5 & \mathbf{0} & 2 & 4 & 4 \\ 3 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 4 & 4 & 3 \\ \mathbf{0} & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 6 & 7 & 4 \end{bmatrix} \end{array} - \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix}1\\2\\3\\4\\5\end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ponovo smo dobili matricu koja među svojim elementima ima nule. Određujemo koje su nule bazne a koje ne. Neka je, ponovo nula na poziciji B1 bazna. Precetavamo sve nule iz prve vrste i kolone B i označavamo ka nebazne. Zatim birmo nulu na poziciji C2 kao baznu a sve ostale nule iz kolone C i 2. vrste kao nebazne. Najzad, uzećemo da je i nula na poziciji A4 (kao i u prethodnom slučaju) a nula na poziciji E4 nebazna.

	A	B	C	D	E
1	3	**0**	0	2	2
2	3	2	**0**	0	3
3	2	0	2	2	1
4	**0**	5	0	2	0
5	3	0	4	5	2

Među neosenčenim poljima biramo najmanju vrednost, to je vrednost 1. Oduzimamo vektor jedinica od 3. i 5. vrste a dodajemo vektor jedinica kolonama B i C:

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 & 2 \end{bmatrix} \end{array} - \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ponavljamo postupak određivanja baznih i nebaznih nula.

	A	B	C	D	E
1	3	1	1	2	2
2	3	3	1	**0**	3
3	1	**0**	2	1	0
4	**0**	6	1	2	0
5	2	0	4	4	1

Kako je broj baznih nula 3 a rang matrice 5, nastavljamo postupak.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 4 & 1 \end{bmatrix} \end{array} - \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \end{array} + \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1\\2\\3\\4\\5 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Neka su sada bazne nule C1, D2, E3, A4 i B5. Algoritam je završen, pronađeno je optimalno rešenje.

	A	B	C	D	E
1	2	1	**0**	2	1
2	2	3	0	**0**	2
3	1	1	2	2	**0**
4	**0**	7	1	3	0
5	1	**0**	3	4	0

Vrednost rešenja se čita iz početne tablice tako što se čitaju vrednosti koje se nalaze na poljima C1, D2,E3,A4 i B5: $6 + 9 + 15 + 14 + 11 = 55$.