



VEŽBE IZ OPERACIONIH ISTRAŽIVANJA

Glava 1

1. Uvod u linearno programiranje
2. Rešavanje sistema linearnih jednačina
3. Rešavanje problema linearnog programiranja grafičkom metodom
4. Simpleks metoda

MARIJA IVANOVIĆ
marijai@math.rs

Uvod u linearno programiranje

Linearno programiranje (u nastavku LP) predstavlja jednu vrstu matematičkog programiranja. Najčešće se koristi za rešavanje matematičkih modela koji odgovaraju maksimizaciji profita, odnosno minimizaciju troškova, pri unapred definisanim uslovima.

Matematički model treba da sadrži

- Linearnu funkciju cilja
- Linearna ograničenja
- Dopustiv skup rešenja

Linearni program se može zapisati u kanonskom obliku

$$\begin{array}{ll} \max & c^T x \\ \text{pri ograničenjima} & Ax \leq b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

gde su

- x – vektor promenljivih (koje treba odrediti)
- b, c – koeficijenti (poznati)
- A – matrica (poznata)

STANDARDNA FORMA

Standardna forma je najjednostavnija oblik linearnog programiranja. Za $n = 3$ matematički model se sastoji iz

- linearne funkcije koju je potrebno maksimizovati:

$$f(x_1, x_2, x_3) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3$$

- pri ograničenjima

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \leq b_3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

Posmatrani problem se može zapisati i matricno na sledeći način:

$$\max\{c^T x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

U nastavku ćemo odgovarajuće probleme modelirati kao probleme linearnog programiranja.

PRIMER 1

Marija se bavi grnčarstvom i pravi šolje i tanjire. Da bi se napravila šolja, potrebno je 6 minuta, dok je za tanjir potrebno 3 minuta. Pri pravljenju šolje potroši se 75 gr, dok se za tanjir potroši 100 gr gline. Ukoliko ima 20 sati na raspolaganju za izradu svih proizvoda i 250 kg gline a zarada koju ostvari iznosi 2 eura po svakoj šolji i 1.5 eura po tanjiru, koliko šolja i tanjira treba da napravi kako bi ostvarila maksimalnu zaradu?

REŠENJE :

Marija će napraviti x šolja i y tanjira.

Funkcija cilja:

- zarada iznosi 2eur/šolja, zarada za x šolja biće $(2 \text{ eur/šolja}) \cdot (x \text{ šolja})$.
- zarada iznosi 1.5eur/tanjir, odnosno zarada od svih tanjira biće $(1.5 \text{ eur/ tanjir}) \cdot (y \text{ tanjira})$.
- o Ukupna zarada iznosi:

$$f(x, y) = 2x + 1,5y \text{ (eur)}$$

Ograničenje vremena:

- vreme potrebno da se napravi jedna šolja iznosi 6min. Dakle, da bi napravili x šolja potrošiće $6x$ minuta.
- slično, za y šolja koristiće $3y$ minuta.
- o Ukupno vreme pravljenja proizvoda iznosi 20h, pa tako:

$$6x + 3y \leq 1200$$

Ograničenje materijala

- Materijal za jednu šolju iznosi 75 gr => x šolja = $75x$ gr materijala
- Materijal za jedan tanjir iznosi 100 gr => y tanjira = $100y$ gr materijala
- o Ukupno, potrošen materijal iznosi

$$75x + 100y \leq 25000$$

Nenegativne promenljive

- Broj šolja i tanjira je najmanje 0, $x \geq 0$, $y \geq 0$ (ne može se napraviti negativan broj šolja ili tanjira !!!!)

Konačno, dobijamo model:

$$\text{Max} \quad f(x, y) = 2x + 1,5y$$

$$\text{Pri ograničenjima:} \quad 6x + 3y \leq 1200$$

$$75x + 100y \leq 25000$$

$$x \geq 0, \quad y \geq 0$$

*Dakle, optimalno rešenje, dobijeno cplex-om: $x = 120$, $y = 160$, $f(x, y) = 480$.

PRIMER 2

Marijin deda ima 320 hektara njive i želi da posadi pšenicu na tom prostoru. Sadnja pšenice bi koštala 50 eura po svakom zasađenom hektaru i donela bi 100 bušela (27,2 kg) po aru. Jedan bušel donosi zaradu od 6 eura. Marija je svom dedi predložila da umesto pšenice zasadi soju, čija sadnja iznosi 100 eura po hektaru i prinos od 100 bušela po hektaru i, pri tom, jedan bušel soje donosi zaradu od 9 eura. Ukoliko Marijin deda ima na raspolaganju 20,000 eura za sadnju da li deda da ostane pri svojoj odluci i sadi samo pšenicu, ili da poslušati Mariju i posadi samo soju ili da posadi i jedno drugo i u kojoj razmeri? Pretpostavimo da skladište može da primi najviše 19,200 bušela robe.

REŠENJE :

Marijin deda želi da posadi x hektara pšenice i y hektara soje.

Funkcija cilja:

- Zarada od x hektara pšenice iznosi $100(\text{bušel/ha}) \cdot 6(\text{eur/bušel}) \cdot x$,
- dok su troškovi sadnje $50(\text{eur/ha}) \cdot x$,
 - o Ukupna zarada za pšenicu iznosi $f(x) = (100 \cdot 6 - 50)x = 550x$ (eur)
- Zarada od y hektara soje iznosi $100(\text{bušel/ha}) \cdot 9(\text{eur/bušel}) \cdot y$,
- dok su troškovi sadnje $100(\text{eur/ha}) \cdot y$,
 - o Ukupna zarada za soju iznosi $f(y) = (100 \cdot 9 - 100)y = 800y$ (eur)
 - o Ukupan prinos iznosi:
 $f(x, y) = 550x + 800y$ (eur)

Ograničenje početnog kapitala, njive i skladišta:

- Deda raspolaže sa 20,000 eura početnog kapitala
 $50x + 100y \leq 20,000$
- Deda raspolaže sa njivom od 320 ha
 $x + y \leq 320$
- Na raspolaganju je skladište koje može da primi najviše 19,200 bušela robe
 $100x + 100y \leq 19,200$

Ograničenje po pitanju količine koja će se saditi:

- Naravno da očekujemo da je
 $x \geq 0, y \geq 0$

Konačno, model

$$\text{Max} \quad f(x, y) = 550x + 800y \text{ (eur)}$$

$$\begin{aligned} \text{Pri ograničenjima:} \quad & 50x + 100y \leq 20000 \\ & x + y \leq 320 \\ & 100x + 100y \leq 19200 \\ & x \geq 0, y \geq 0 \end{aligned}$$

*Optimalno rešenje, dobijeno cplex-om: : $x = 0$, $y = 192$, $f(x, y) = 153,600$

PRIMER 3

Marijina firma želi da investira novac i tom prilikom predloženo joj je 5 različitih investicionih scenarija. Protok novca (cash outflows) i trenutna vrednost akcija dati su u tabeli. Ove godine planirano je da se uloži najviše 40 mil eur, dok će se naredne godine, u iste akcije, uložiti najviše 20 mil eur. Nije obavezno da se uloži u čitav projekat, odnosno možemo kupiti samo deo neke investicije. Npr, ako u investiciju pod rednim brojem 4 uložimo samo $\frac{1}{4}$ investicije, potrebno je da ove godine platimo $\frac{1}{4}(5) = 1,25$ i $\frac{1}{4}(1) = 0,25$, a zarada iznosi $\frac{1}{4}(14) = 3,5$. Naš cilj je da pomognemo Mariji oko izbora investicija tako da, nakon dve godine, profit bude maksimalan.

Napomena: Nemoguće je kupiti akciju samo za II godinu. Akcije se kupuju u paketu za I i II godinu. Može se uložiti u više različitih investicija ili se više puta kupiti ista investicija.

	Investicija 1	Investicija 2	Investicija 3	Investicija 4	Investicija 5
I godina	11	53	5	5	29
II godina	3	6	5	1	34
Totalni profit	13	16	16	14	39

REŠENJE

Možemo uložiti novac u 5 različitih investicija. Moguće je investirati u čitavu investiciju ili samo njen deo.

- Neka x_i predstavlja koliko investiramo u investiciju i . U datom primeru je $x_4 = 1/4$.
- Hajde da u prvu investiciju uložimo x_1 čime, na kraju, profit od te investicije iznosi $13x_1$, u drugu x_2 što nam donosi profit od $16x_2$ i tako redom. Naš zadatak je da odredimo nepoznate x_i koje će nam omogućiti da $13x_1 + 16x_2 + 16x_3 + 14x_4 + 39x_5$ bude maksimalno.
- Naravno, postoje ograničenja za x_i obzirom da na raspolaganju imamo određenu svotu novca. Pa tako, u prvoj godini, kupovina x_1 dela prve investicije košta $11x_1$, kupovina druge investicije košta $53x_2$, treće $5x_3$, itd. Ukupno, možemo platiti najviše 40 mil, što znači da $11x_1 + 53x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 29x_5$ ne sme biti veće od 40 mil. Na isti način, naredne godine ugovorene investicije koštaće $3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 + 34x_5$ što ne sme biti veće od 20mil (iznos kojim raspolažemo tokom druge godine).

Možemo da formiramo LP problem.

Funkcija cilja je

$$\max f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \quad (1)$$

gde je $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 13x_1 + 16x_2 + 16x_3 + 14x_4 + 39x_5$

Ograničenja:

$$11x_1 + 53x_2 + 5x_3 + 5x_4 + 29x_5 \leq 40 \quad (2)$$

$$3x_1 + 6x_2 + 5x_3 + x_4 + 34x_5 \leq 20 \quad (3)$$

Zašto " \leq " a ne " $=$ " u drugoj i trećoj nejednakosti? Zato što možemo uložiti manje novca od onog koji nam je na raspolaganju i opet ostvariti maksimalnu zaradu. Bitno je da ne uložimo više nego što imamo.

Ostaju ograničenja u vezi nepoznatih.

Jasno je da $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, 5$ tj. ne možemo kupiti –deo investicije. Da li se može investirati u istu investiciju dva puta? Na primer, da li mogu investirati u investiciju 3 ili 4 dva ili više puta? Ukoliko može, onda je dozvoljeno $x_i \geq 1$, odnosno ako se može investirati u deo investicije, a najviše u celu, tada imamo ograničenje $x_i \leq 1$.

Dakle, ograničenje može biti ili $x_i \geq 0$ ili $0 \leq x_i \leq 1$.

*Optimalna vrednost: 118. Rešenje $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, ostali x_i su jednaki nuli.

PRIMER 4

Pretpostavimo da se otvara nova Pošta u komšiluku i da zapošljava radnike. Broj radnika, potrebnih dnevno, dat je tabelom. Pored stalno zaposlenih, pošta može da zaposli radnike i po ugovoru o delu. Stalno zaposleni radnik radi 5 vezanih dana i posle toga ima pauzu od 2 dana. Svaki radni dan stalno zaposlenog radnika plaća se 80 eura, dok se svaki radni dan vikendom plaća 100 eura. Zaposleni po ugovoru o delu dobijaju 95 eur bez obzira da li rade radnim danom ili vikendom.

- A) Napraviti LP model koji će direktoru pošte omogućiti da minimizuje platu za svoje zaposlene a ipak ispuni zahteve o broju zaposlenih.
B) Pretpostavimo da je najmanje 60% stalno zaposlenih slobodno petkom.

Dan	Ponedeljak	Utorak	Sreda	Četvrtak	Petak	Subota	Nedelja
Br.radnika	17	13	15	18	14	16	11

REŠENJE:

Obeležimo sa

- x_1 broj stalno zaposlenih koji rade od ponedeljka do petka i imaju slobodan vikend
- x_2 broj stalno zaposlenih koji rade od utorka do subote i imaju slobodnu nedelju i ponedeljak
- x_3 broj stalno zaposlenih koji rade od srede do nedelje i imaju slobodan ponedeljak i utorak
- x_4 broj stalno zaposlenih koji rade od četvrtka do ponedeljka, imaju slobodan utorak i sredu
- x_5 broj stalno zaposlenih koji rade od petka do utorka, imaju slobodnu sredu i četvrtak
- x_6 broj stalno zaposlenih koji rade od subote do srede, imaju slobodan četvrtak i petak
- x_7 broj stalno zaposlenih koji rade od nedelje do četvrtka i imaju slobodan petak i subotu.
- y_1 broj part-time zaposlenih koji će pomagati u ponedeljak
- y_2 broj part-time zaposlenih koji će pomagati u utorak
- y_3 broj part-time zaposlenih koji će pomagati u sredu,
-
- y_7 broj part-time zaposlenih koji će pomagati u nedelju

Ponedeljkom pošta potražuje 17 radnika, dakle:

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + y_1 = 17 \quad (1)$$

Utorkom, postoji potreba za 13 radnika: $x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 + y_2 = 13 \quad (2)$

Sredom: $x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 + y_3 = 15 \quad (3)$

Četvrtkom $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 + y_4 = 18 \quad (4)$

Petkom: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + y_5 = 14 \quad (5)$

Subotom: $x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 16 \quad (6)$

Nedeljom: $x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + y_7 = 11 \quad (7)$

Jednačine (1)-(7) predstavljaju ograničenja.

Dodaćemo i ograničenje $x_i \geq 0, y_j \geq 0, i = 1, \dots, 7, j = 1, \dots, 7$.

Ostaje funkcija cilja (cost function):

Kolika je plata zaposlenih iz grupe koja radi ponedeljak-petak?

Radni dan iznosi 80 eura, dakle ukupna zarada je $80 \cdot 5 = 400$ eura.

Kolika je plata zaposlenih iz grupe koja radi utorak-subota?

Oni imaju jedan vikend koji se plaća 100 eura, stoga ukupna zarada iznosi $80 \cdot 4 + 100 = 420$ eura

Zaposleni iz grupe sreda-nedelja: 3 radna dana + 2 vikenda: $80 \cdot 3 + 100 \cdot 2 = 440$ eura

Istu platu imaju i zaposleni iz grupa

četrtek – ponedjeljak, petak – utorak, subota – sreda
 Grupa zaposlenih nedjelja - četrtek također prima platu od 420 eura.
 Dakle, poštu stalno zaposleni “koštaju”

$$400x_1 + 420(x_2 + x_7) + 440(x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$$

Part-time zaposleni imaju fiksnu naknadu, u iznosu od 100 eura po danu. Ova vrsta zaposlenih, poštu “košta”

$$100(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7)$$

Konačno, LP problem:

$$\min f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7) = 400x_1 + 420(x_2 + x_7) + 440(x_3 + x_4 + x_5 + x_6) + 100(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 + y_6 + y_7)$$

Pri uslovima:

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + y_1 = 17 \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 + y_2 = 13 \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 + y_3 = 15 \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 + y_4 = 18 \quad (4)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + y_5 = 14 \quad (5)$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 16 \quad (6)$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + y_7 = 11 \quad (7)$$

Ograničenja

$$x_i \geq 0, y_j \geq 0, i = 1, \dots, 7, j = 1, \dots, 7.$$

Deo pod B:

Ukupan broj stalno zaposlenih je $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7$

Ukupan broj zaposlenih kojima je petak slobodan je $x_6 + x_7$

Uslov je da najmanje 60% zaposlenih treba da je slobodno petkom. To znači da je

$$\frac{60}{100} (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7) \leq x_6 + x_7 \quad (8)$$

REŠENJE SA ČASA:

$$\min f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7) = 9880 - 75x_1 - 55(x_2 + x_7) - 35(x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$$

Pri uslovima:

$$x_1 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 17 \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 13 \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_6 + x_7 \leq 15 \quad (3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_7 \leq 18 \quad (4)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 14 \quad (5)$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 16 \quad (6)$$

$$x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 11 \quad (7)$$

Ograničenja

$$x_i \geq 0, i=1, \dots, 7$$

PRIMER 5

Naftna kompanija se bavi distribucijom 3 različita tipa nafte (naf1, naf2 i naf3). Sva tri tipa nafte se prave pomoću tri različita tipa sirove nafte (sn1, sn2, sn3). Cena nafte i cena sirove nafte po 1 barelu (1barel =119,2l), dati su tabelom.

NAFTA	1 barel	SIROVA NAFTA	1 barel
Naf1	70	Sn1	45
Naf2	60	Sn2	35
Naf3	50	Sn3	25

Naftna kompanija može da dopremi najviše po 5,000 barela od svake vrste sirove nafte dnevno. Tipovi nafte koja se proizvodi se međusobno razlikuju po nivou oktana i sumpora. Sirova nafta koja se koristi u proizvodnji naf1 mora da ima najmanje nivo oktana 10 a najviše 1% sumpora. Nafta tipa naf2 sadrži nivo oktana od najmanje 8 a najviše 2% sumpora. Nafta tipa naf3 treba da sadrži najmanje oktana nivoa 6 i najviše 1% sumpora. Nivo oktana i sumpora su dati u tabeli 2.

SIROVA NAFTA	NIVO OKTANA	NIVO SUMPORA
sn1	12	0,5
sn2	6	2
sn3	8	3

Proizvodnja po jednom barelu sirove nafte košta 4 eur i kompanija ima kapacitete da dnevno može proizvesti najviše 14,000 barela nafte. Obaveza kompanije je da svojim kupcima dnevno obezbedi najmanje 3 000, 2 000 i 3 000 barela nafte (naf1, naf2 i naf3, tim redom) dnevno.

Napraviti model tako da kompanija maksimizuje svoj profit.

Ukoliko kompanija angažuje marketinšku kompaniju, očekuje se da će se za svaki uloženi evro na reklamiranje određenog tipa nafte, povećati potreba za 10 barela.

REŠENJE

Neka je x_{ij} količina sirove nafte j korišćene u proizvodnji nafte i , odnosno

x_{11} - količina sirove nafte 1 korišćene u proizvodnji nafte 1,

x_{12} - količina sirove nafte 2 korišćene u proizvodnji nafte 1

x_{13} - količina sirove nafte 3 korišćene u proizvodnji nafte 1.

Čime dobijamo ukupnu količinu gasa 1: $x_{11} + x_{12} + x_{13}$. Slično pišemo i za ostale tipove gasa.

“Naftna kompanija može da dopremi najviše po 5000 barela od svake vrste sirove nafte dnevno.”:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 5000 \quad (x_{11}, x_{21}, x_{31} - \text{količina sirove nafte tipa 1 korišćene u proizvodnji gasa 1, 2 i 3})$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 5000 \quad (x_{12}, x_{22}, x_{32} - \text{količina sirove nafte tipa 2 korišćene u proizvodnji gasa 1, 2 i 3})$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 5000 \quad (x_{13}, x_{23}, x_{33} - \text{količina sirove nafte tipa 3 korišćene u proizvodnji gasa 1, 2 i 3})$$

“Sirova nafta koja se koristi u proizvodnji naf1 mora da ima najmanje nivo oktana 10 a najviše 1% sumpora”:

$$\frac{0,5}{100}x_{11} + \frac{2}{100}x_{12} + \frac{3}{100}x_{13} \leq \frac{1}{100}(x_{11} + x_{12} + x_{13})$$

$$12x_{11} + 6x_{12} + 8x_{13} \geq 10(x_{11} + x_{12} + x_{13})$$

“Nafta tipa naf2 sadrži nivo oktana od najmanje 8 a najviše 2% sumpora.”

$$\frac{0,5}{100}x_{21} + \frac{2}{100}x_{22} + \frac{3}{100}x_{23} \leq \frac{2}{100}(x_{21} + x_{22} + x_{23})$$

$$12x_{21} + 6x_{22} + 8x_{23} \geq 8(x_{21} + x_{22} + x_{23})$$

“Nafta tipa naf3 treba da sadrži najmanje oktana nivoa 6 i najviše 1% sumpora.”

$$\frac{0,5}{100}x_{31} + \frac{2}{100}x_{32} + \frac{3}{100}x_{33} \leq \frac{1}{100}(x_{31} + x_{32} + x_{33})$$

$$12x_{31} + 6x_{32} + 8x_{33} \geq 6(x_{31} + x_{32} + x_{33})$$

“kompanija ima kapacitete da dnevno može proizvesti najviše 14,000 barela nafte za prodaju”

$$\sum_{i,j=1}^3 x_{ij} \leq 14,000$$

“Obaveza kompanije je da svojim kupcima dnevno obezbedi najmanje 3 000, 2 000 i 3 000 barela nafte (naf1, naf2 i naf3, tim redom) dnevno”

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 3,000$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 2,000$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 3,000$$

Ograničenja su, kao i do sada,

$$x_{ij} \geq 0, i, j = 1, \dots, 3.$$

Ostalo je da se odredi funkcija cilja:

Dakle, kupujemo sirovu naftu, po ceni datoj u tabeli, transformišemo je po ceni od 4 eura po barelu i prodamo po ceni iz tabele:

Količina nafta tipa1 koju ćemo proizvesti iznosi: $gas_1 = x_{11} + x_{12} + x_{13}$. Prilikom prodaje, za gas tipa1 zaradićemo $70(x_{11} + x_{12} + x_{13})$ eur . Da bi nabavili potrebne sastojke za proizvodnju gas_1 potrebno je uložiti $(45x_{11} + 35x_{12} + 25x_{13})$ eur. Troškovi obrade gas_1 iznose $4 * gas_1$. Dakle, gas tipa 1 donosi zaradu od

$$Suma1 = (70 - 4)(x_{11} + x_{12} + x_{13}) - (45x_{11} + 35x_{12} + 25x_{13})$$

Ponavljamo postupak za gas tipa 2 i gas tipa 3:

$$Suma2 = (60 - 4)(x_{21} + x_{22} + x_{23}) - (45x_{21} + 35x_{22} + 25x_{23})$$

$$Suma3 = (50 - 4)(x_{31} + x_{32} + x_{33}) - (45x_{31} + 35x_{32} + 25x_{33}).$$

Funkcija cilja:

$$\text{Max } Suma1 + Suma2 + Suma3$$

Konačno, LP problem (sređen):

$$\text{Max } f(X) = 21x_{11} + 31x_{12} + 41x_{13} + 11x_{21} + 21x_{22} + 31x_{23} + x_{31} + 11x_{32} + 21x_{33}$$

Pri ograničenjima

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 5000 \quad (1)$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} \leq 5000 \quad (2)$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} \leq 5000 \quad (3)$$

$$-0,005x_{11} + 0,01x_{12} + 0,02x_{13} \leq 0 \quad (4)$$

$$2x_{11} - 4x_{12} - 2x_{13} \geq 0 \quad (5)$$

$$-0,015x_{21} + 0,01x_{23} \leq 0 \quad (6)$$

$$4x_{21} - 2x_{22} \geq 0 \quad (7)$$

$$-0,005x_{31} + 0,01x_{32} + 0,02x_{33} \leq 0 \quad (8)$$

$$6x_{31} + 2x_{33} \geq 0 \quad (9)$$

$$\sum_{i,j=1}^3 x_{ij} \leq 14000 \quad (10)$$

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \geq 3000 \quad (11)$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \geq 2000 \quad (12)$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} \geq 3000 \quad (13)$$

Nenegativne promenljive

$$x_{ij} \geq 0, i, j = 1, \dots, 3.$$

Cplex rešenje:

Objective value 185 500

$x_{11}= 2000$ $x_{12}= 1000$ $x_{13}=0$ $x_{21}= 1000$ $x_{22}= 2000$ $x_{23}=1500$ $x_{31} = 2000$ $x_{32}= 1000$ $x_{33}=0$

PRIMER 6 (Problem dijete)

Marija je odlučila da koriguje ishranu i u tu svrhu je zanima koliko para treba da potroši kako bi kupila hranu čija je ukupna energetska vrednost 2,000 kcal a koja sadrži 55g proteina odnosno 800mg kalcijuma neophodnih za dnevno funkcionisanje. Marija se odlučuje da kupi 6 različitih proizvoda koji, po njoj, sadrže neophodne sastojke a može ih sebi priuštiti. Sledi tabela sa nutritivnim svojstvima hrane:

hrana	veličina porcije	energija (kcal)	proteini (g)	kalcijum (mg)	cena po porciji
ovseni obrok	28 g	110	4	2	30 din
piletina	100 g	205	32	12	240 din
jaja	2 kom, klasa s	160	13	285	130 din
mleko	237 cc	160	8	22	90 din
pita sa višnjama	170 g	420	4	22	200 din
svinjetina sa povrćem	260 g	260	14	80	190 din

Marija je odlučila da napravi plan ishrane, odnosno broj porcija po danu:

	broj porcija po danu
ovseni obrok	4
piletina	3
jaja	2
mleko	8
pita sa višnjama	2
svinjetina sa povrćem	2

Rešenje:

Kako bi napravila najekonomičniji meni, Marija je odlučila da sa x_1 obeleži broj porcija ovsenog obroka, sa x_2 broj porcija pilete i tako redom. Njena ideja je da odredi vrednosti x_1, x_2, \dots, x_6 tako da uneta hrana sadrži minimalne zahteve po pitanju energije, proteina, kalcijuma i da je, naravno, što ekonomičnija.

Problem dijete može se napisati na sledeći način:

$$\min 30x_1 + 240x_2 + 130x_3 + 90x_4 + 200x_5 + 190x_6$$

pri ograničenju:

$$0 \leq x_1 \leq 4$$

$$0 \leq x_2 \leq 3$$

$$0 \leq x_3 \leq 2$$

$$0 \leq x_4 \leq 8$$

$$0 \leq x_5 \leq 2$$

$$0 \leq x_6 \leq 2$$

$$110x_1 + 205x_2 + 160x_3 + 160x_4 + 420x_5 + 260x_6 \geq 2000$$

$$4x_1 + 32x_2 + 13x_3 + 8x_4 + 4x_5 + 14x_6 \geq 55$$

$$2x_1 + 12x_2 + 54x_3 + 285x_4 + 22x_5 + 80x_6 \geq 800$$

PRIMER 7 (Problem transporta)

Potrebno je pokupiti proizvode iz m fabrika tako da se iz prve fabrike uzima a_1 kilograma proizvoda, iz druge fabrike a_2 kilograma proizvoda, iz treće fabrike a_3 kilograma i tako redom. Roba se dalje prosleđuje u n prodavnica, tako što prva prodavnica potražuje b_1 kilogram, druga prodavnica b_2 kilograma, ..., n -ta prodavnica b_n kilograma proizvoda. Očekuje se da je količina robe koja se preuzima iz fabrika jednaka onoj količini robe koja se dalje prosleđuje prodavnicama, tj. $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$. Cena transporta robe iz fabrike i ka prodavnici j iznosi c_{ij} . Ako pretpostavimo da se prevoz robe vrši pomoću dovoljno velikog kamiona, potrebno je odrediti količinu robe x_{ij} koja se iz fabrike i šalje u prodavnicu j tako da ukupna cena transporta bude minimalna.

Rešenje

$$\min \sum_{i,j} c_{ij}x_{ij}$$

pri ograničenjima

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_{ij} &= a_i, i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} &= b_j, j = 1, 2, \dots, n \\ x_{ij} &\geq 0, \forall i, j \end{aligned}$$

ZADACI ZA SAMOSTALNI RAD:

ZADATAK 1

Marijin komšija preprodaje računare i računarsku opremu. Očekuje isporuku računara i štampača. Pri tom, računari su spakovani tako da njihova kutija zauzima 360 kubnih decimetara prostora, dok se štampači pakuju u kutijama koje zauzimaju 240 kubnih decimetara prostora. Komšija se trudi da mesečno proda najmanje 30 računara i da taj broj bude bar za 50% veći od broja prodatih štampača. Računari koštaju 200eur po nabavnoj ceni, a prodaju se po ceni od 400eur, dok štampači koštaju u nabavci 60eur i prodaju se za 140eur. Magacin kojim komšija raspolaže ima svega 30,000 kubnih decimetara prostora i mesečno može da nabavi robu u iznosu od najviše 14,000 eur. Koliko računara a koliko štampača komšija treba da proda kako bi se maksimalno obogatio?

ZADATAK 2

Marijin brat radi u fabrici za proizvodnju X i Y proizvoda pomoću dve mašine (A i B). Za izradu proizvoda X potrebno je 50 min obrade na mašini A i 30 min obrade na mašini B. Proizvod Y se 24 min obrađuje na mašini A i 33 minuta na mašini B. Na početku ove nedelje napravljeno je 30 proizvoda X i 90 proizvoda Y. Mašina A je na raspolaganju samo 40 sati dok je mašina B na raspolaganju tek 35 sati. Direktor očekuje da se do kraja nedelje napravi najmanje 75 X i 95 Y proizvoda. Politika firme je da broj proizvoda bude maksimalan. Formulirati problem odlučivanja koliko od svakog proizvoda treba napraviti u tekućoj nedelji kao linearni problem.

Sistemi linearnih jednačina

Kao što se može primetiti, problem linearnog programiranja se, za početak, svodi na formiranje sistema linearnih jednačina koje treba rešiti. Pod rešavanjem sistema podrazumeva se nalaženje skupa svih rešenja.

Polazeći od pretpostavke da se svaki sistem linearnih jednačina može predstaviti u obliku

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

rešenje sistema je uređena n -torka vrednosti nepoznatih koja zadovoljava sve nejednačine sistema. Pod rešavanjem sistema podrazumeva se postupak nalaženje skupa svih rešenja. Za više informacija pogledati [1].

Furije – Mockinova metoda za rešavanje sistema

Ideja metode sastoji se u eliminaciji nepoznatih. Prvo se proizvoljno izabere jedna promenljiva za eliminisanje, zatim se sve jednačine razdvoje u tri podskupa. U prvom podskupu se nalaze jednačine kod kojih je koeficijent uz posmatranu jednačinu negativan. U drugom skupu se nalaze jednačine kod kojih je koeficijent uz posmatranu promenljivu jednak nuli, dok se u trećem skupu nalaze jednačine kod kojih je koeficijent uz posmatranu promenljivu strogo pozitivan. Označimo dobijene skupove sa I , J i K . Zatim se svaka jednačina iz skupa I sabira sa svakom jednačinom iz skupa K formirajući nova ograničenja. Kao rezultat ovog postupka dobija se sistem koji je sačinjen od jedne promenljive manje u odnosu na polazni sistem.

PRIMER 8

Metodom eliminacije odrediti skup rešenja problema:

$$\begin{array}{l} \max f = 2x + 3y \\ \text{pri ograničenjima} \quad x - 2y \leq 4 \\ \quad \quad \quad \quad \quad 2x + y \leq 18 \\ \quad \quad \quad \quad \quad y \leq 10 \\ \quad \quad \quad \quad \quad x, y \geq 0 \end{array}$$

REŠENJE

Hajde da funkciju cilja uvrstimo u ograničenja. Time dobijamo da je $f \leq 2x + 3y$. Zašto je ovde nejednakost? Zato što se traži maksimum funkcije f , tj. ne može se dobiti više od $2x + 3y$.

Eliminisaćemo promenljivu x iz sistema. Označićemo funkciju cilja sa 1, a ograničenja sa 2-6 (tim redom).

$$\begin{array}{ll} -x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}f \leq 0 & (1) \\ x - 2y \leq 4 & (2) \\ x + \frac{1}{2}y \leq 9 & (3) \\ y \leq 10 & (4) \\ y \geq 0 & (5) \\ -x \leq 0 & (6) \end{array}$$

Jednačine (2) i (3) pripadaju skupu I, jednačine (1) i (6) skupu K, dok su jednačine (4) i (5) pripadaju skupu J. Kombinovanjem jednačina iz skupova I i K dobijaju se sledeća ograničenja:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}f &\leq 4 + 2y \rightarrow y \geq \frac{f-8}{7} \\ -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}f &\leq 9 - \frac{1}{2}y \rightarrow y \geq -9 + \frac{f}{2} \\ 0 &\leq 4 + 2y \rightarrow y \geq -2 \\ 0 &\leq 9 - \frac{1}{2}y \rightarrow y \leq 18 \\ & y \leq 10 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Primitimo da je ograničenje $y \geq -2$ sadržano u ograničenju $y \geq 0$, dakle $y \geq 0$.

Sa druge strane dobijeno je ograničenje $y \leq 18$ koje je sadržano u ograničenju $y \leq 10$. Dakle, $y \leq 10$.

Ponavljajući postupak, eliminisaćemo promenljivu y iz novodobijenog sistema.

$$\begin{aligned} y &\geq \frac{f-8}{7} \\ y &\geq -9 + \frac{f}{2}, \\ y &\leq 10, \quad y \geq 0. \end{aligned}$$

Jednačinu $y \leq 10$ kombinovaćemo sa preostalim jednačinama poslednjeg sistema.

$$\begin{aligned} \frac{f-8}{7} &\leq 10 \rightarrow f \leq 78 \\ -9 + \frac{f}{2} &\leq 10 \rightarrow f \leq 38 \\ & 0 \leq 10 \end{aligned}$$

Eliminacijom promenljivih x i y dobija se sistem koji zavisi samo od f . Kako je 38 maksimalno gornje ograničenje funkcije f , sledi da je to i optimalna vrednost našeg problema. Hodom unazad može se odrediti skup dopustivih rešenja za promenljive x i y .

PRIMER 9

Metodom eliminacije odrediti skup rešenja problema:

$$\begin{aligned} \max f &= 5x + y \\ \text{Pri ograničenjima} \quad 2x + y &\geq 5 \\ & y \geq 1 \\ 2x + 3y &\leq 6 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

REŠENJE

Rešavamo posmatrani sistem po y :

$$\begin{aligned} f &\leq 5x + y \rightarrow y \geq -5x + f \\ 2x + y &\geq 5 \rightarrow y \geq -2x + 5 \\ & y \geq 1 \\ 2x + 3y &\leq 6 \rightarrow y \leq -\frac{2}{3}x + 2 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Ograničenje $y \geq 0$ može da se eliminiše sa obzirom da je sadržano u ograničenju $y \geq 1$. Kombinovanjem prva tri ograničenja sa četvrtim, dobija se sledeći sistem:

$$\begin{aligned}
-5x + f &\leq -\frac{2}{3}x + 2 \rightarrow x \geq \frac{3}{17}f - 2 \\
-2x + 5 &\leq -\frac{2}{3}x + 2 \rightarrow \frac{4}{3}x \geq 3 \rightarrow x \geq \frac{9}{4} \\
1 &\leq -\frac{2}{3}x + 2 \rightarrow x \leq \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Najzad, eliminacijom promenljive x dobiće se sistem po f :

$$\frac{17}{3}x + \frac{34}{6} \geq f \rightarrow \frac{17}{3} \cdot \frac{9}{4} + \frac{34}{6} = \frac{51}{4} + \frac{17}{3} = 18,42 \geq f$$

PRIMER 10

Primeniti metodom eliminacije kako bi se odredio skup rešenja sistema:

$$\begin{aligned}
x &\geq 0 \\
x + 2y &\leq 6 \\
x + y &\geq 2 \\
x - y &\geq 3 \\
y &\geq 0 \\
-2x - y &\leq f
\end{aligned}$$

REŠENJE

Rešavamo problem u odnosu na promenljivu x :

$$\begin{aligned}
x &\geq 0 \\
x &\leq 6 - 2y \\
x &\geq 2 - y \\
x &\geq 3 + y \\
y &\geq 0 \\
x &\geq -\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}y
\end{aligned}$$

Uporedimo nejednačine (I i II, II i III, II i IV, II i VI):

$$\begin{aligned}
0 &\leq 6 - 2y \\
2 - y &\leq 6 - 2y \\
3 + y &\leq 6 - 2y \\
y &\geq 0 \\
-\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}y &\leq 6 - 2y
\end{aligned}$$

Konačno, dobijamo:

$$\begin{aligned}
y &\leq 3 \\
y &\leq 4 \\
y &\leq 3 \\
y &\geq 0 \\
f &\geq 3y - 12 \text{ iz poslednje nejednačine sledi da je najmanje } f = -12.
\end{aligned}$$

PRIMER 11

Primeniti metodom eliminacije kako bi se odredio skup rešenja sistema:

$$\begin{aligned}2x - 5y + 4z &\leq 10 \\3x - 6y + 3z &\leq 9 \\5x + 10y - z &\leq 15 \\-x + 5y - 2z &\leq -7 \\-3x + 2y + 6z &\leq 12\end{aligned}$$

REŠENJE

Rešavamo problem u odnosu na promenljivu x :

$$\begin{aligned}x &\leq 5 + \frac{5}{2}y - 2z \\x &\leq 3 + 2y - z \\x &\leq 3 - 2y + \frac{1}{5}z \\x &\geq 7 + 5y - 2z \\x &\geq -4 + \frac{2}{3}y + 2z\end{aligned}$$

Dalje, rešavamo u odnosu na promenljivu y

$$\begin{aligned}7 + 5y - 2z &\leq 5 + \frac{5}{2}y - 2z & y &\leq -\frac{4}{5} \\7 + 5y - 2z &\leq 3 + 2y - z & y &\leq -\frac{4}{3} + \frac{1}{3}z \\7 + 5y - 2z &\leq 3 - 2y + \frac{1}{5}z & y &\leq -\frac{4}{7} + \frac{11}{35}z \\-4 + \frac{2}{3}y + 2z &\leq 5 + \frac{5}{2}y - 2z & y &\geq -\frac{54}{11} \\-4 + \frac{2}{3}y + 2z &\leq 3 + 2y - z & y &\geq \frac{9}{4}z - \frac{21}{4} \\-4 + \frac{2}{3}y + 2z &\leq 3 - 2y + \frac{1}{5}z & y &\leq \frac{21}{8} - \frac{27}{40}z\end{aligned}$$

Sledi dalje,

$$\begin{aligned}-\frac{4}{3} + \frac{1}{3}z &\geq -\frac{54}{11} \text{ odnosno, } z \geq -\frac{118}{11} \\-\frac{4}{7} + \frac{11}{35}z &\geq -\frac{54}{11} \text{ odnosno, } z \geq -1062.72 \\\frac{9}{4}z - \frac{21}{4} &\leq -\frac{4}{5} \text{ odnosno } z \leq \frac{89}{45} (= 1.978) \\\frac{21}{8} - \frac{27}{40}z &\leq -\frac{4}{5} \text{ odnosno } z \geq 5.074\end{aligned}$$

PRIMER 12

Primeniti metodu eliminacije na primer br 4.

Rešavanje LP problema grafičkom metodom

PRIMER 13

Fabrika za proizvodnju stakala, Staklo CO, bavi se izradom prozora i balkon vrata. Fabrika se sastoji iz tri proizvodna dela: dela za aluminijumske ramove (Sektor C1), dela za drvene ramove (Sektor C2) i trećeg dela u kome se obrađuje staklo (Sektor C3). Kako je zarada počela da opada, direktor fabrike je odlučio da više ne proizvodi neisplative proizvode i da uvede dva nova proizvoda za koja misli da će mu doneti veću zaradu:

Prozor A: prozori veličine 4x4 m sa aluminijumskim ramom

Prozor B: prozori dimenzija 2x3 m sa sa duplim staklom i drvenim ramom

Prozor A bi se proizvodio u sektorima C1 i C3, dok bi se prozor B proizvodio u sektorima C2 i C3. Tim za marketing se potrudio oko predstavljanja novih proizvoda i zaključio da bi fabrika mogla da proda sve što proizvede koliko god da proizvede. Međutim, kako oba proizvoda koriste sektor C2, postavlja se pitanje organizacije tog sektora u smislu, koliko prozora A, odnosno koliko prozora B treba proizvesti kako bi se ta proizvodnja najviše isplatila?

Prilikom rešavanja samog problema treba imati u obzir sledeće podatke:

- cena proizvoda A, B
- vreme potrebno da se naprave delovi proizvoda u svakom sektoru.

Kako se prozori A i B prave u serijama od nekoliko komada (neka standardna količina unapred definisana), uzećemo da je x_1 broj serija prozora A napravljenih tokom jedne sedmice, odnosno neka x_2 predstavlja broj serija prozora B napravljenih tokom iste te sedmice. Neka je cena prozora A 3,000 eur dok je cena prozora B 5,000 eur. Cilj fabrike je maksimizacija zarade, dakle

$$\max 3x_1 + 5x_2$$

U tabeli je dato vreme potrebno da se naprave serije prozora A i B u odgovarajućim sektorima. Na primer, vreme potrebno da se napravi serija prozora A u sektoru C1 iznosi 1h nedeljno, dok je maksimalno raspoloživo vreme sektora C1 4h nedeljno ($x_1 \leq 4$). Raspoloživo vreme po sektorima, kao i vreme izrade određenih proizvoda, definisano je u tabeli.

Sektor	vreme potrebno za izradu serije prozora po satima		raspoloživ broj sati za proizvodnju, nedeljno
	Prozor A	Prozor B	
C1	1	0	4
C2	0	2	12
C3	3	2	18
Cena po seriji	3,000 eur	5,000 eur	

Dakle, imamo da je $2x_2 \leq 12$, odnosno $3x_1 + 2x_2 \leq 18$. Konačno, količina proizvoda je nenegativna veličina pa važi $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$.

Model koji odgovara posmatranom problemu je sledećeg oblika:

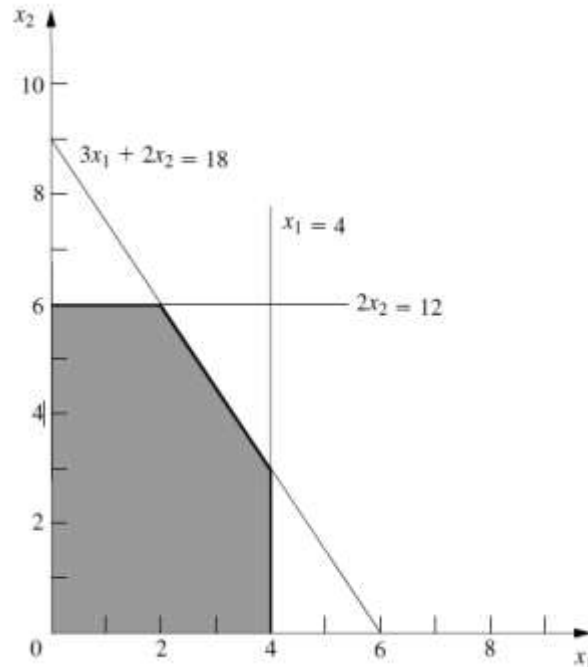
$$\max 3x_1 + 5x_2$$

pri ograničenjima

$$\begin{aligned}x_1 &\leq 4 \\2x_2 &\leq 12 \\3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \\x_1 &\geq 0, x_2 \geq 0\end{aligned}$$

Jasno nam je da director kompanije neće biti zadovoljan ako mu samo dostavimo model. Opisani problem se može rešiti metodama za rešavanje problema linearnog programiranja.

Problemi sačinjeni korišćenjem samo dve promenljive se lako mogu rešiti grafičkom metodom. Neka je dat koordinatni sistem x_1Ox_2 . Na osnovu ograničenja, jasno je da ćemo za opisani problem posmatrati samo I kvadrant. Na slici 1 je osenčen dopustiv skup rešenja.



Slika 1

Rešenje problema nalazi se u dopustivom skupu (granice skupa su uključene).

Kako se određuje vrednost funkcije cilja?

Neka je $Z = 3x_1 + 5x_2$.

Potrebno je maksimizirati vrednost Z .

To se može učiniti "metodom pokušaja":

- Na primer, uzmimo da je $10 = 3x_1 + 5x_2$.

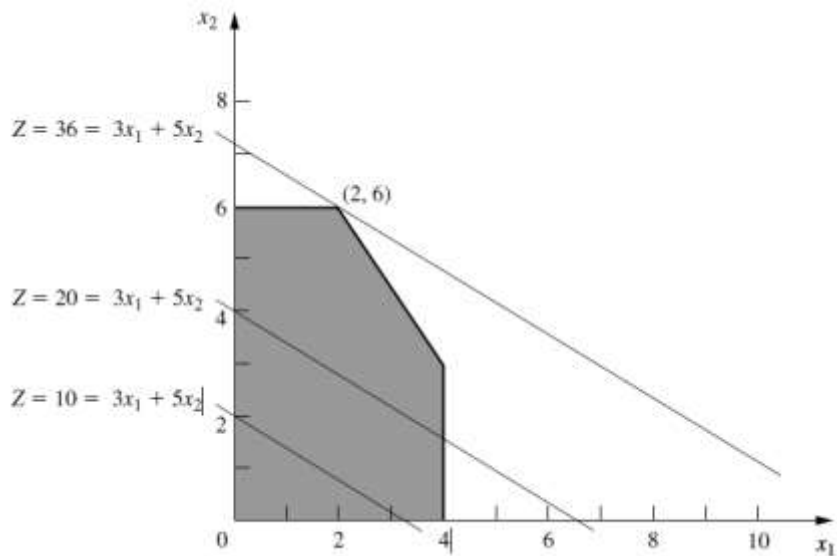
Potrebno je proveriti da li postoji tačka (x_1, x_2) koja zadovoljava ovu relaciju a nalazi se unutar dopustivog skupa.

Povlačenjem prave $10 = 3x_1 + 5x_2$ primetimo da postoji nekoliko tačaka koje zadovoljavaju datu relaciju (Slika 2) ali isto tako vidimo da Z može imati i veću vrednost, npr. 20.

Ponovo vidimo da postoji niz tačaka koje zadovoljavaju relaciju $20 = 3x_1 + 5x_2$ i da bi nova prava bila paralelna prethodnoj.

Kako bi im i svaka druga prava konstruisana na opisan način bila paralelna i kako se vrednost funkcije cilja povećava srazmerno povećanju vrednosti x_2 : $x_2 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{5}Z$ sa slike vidimo da je maksimalna vrednost koju x_2 može imati je 6 za $0 \leq x_1 \leq 2$.

Maksimalna vrednost koju promenljiva Z može imati se dobija i za maksimalnu vrednost x_1 , odakle sledi da je $\max Z = 36$



Slika 2

Dakle, fabrika će najviše zaraditi (36,000 eur) ukoliko bude proizvodila 2 serije prozora A i 6 serija prozora B nedeljno ($x_1 = 2, x_2 = 6$).

Da li je moguće organizovati proizvodnju tako da ukupna zarada iznosi 50,000? Ako je planirana zarada 18,000 eur, organizovati proizvodnju?

PRIMER 14

Grafičkom metodom rešiti sledeći LP problem

pri ograničenjima

$$\max 3x_1 + 7x_2$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 10$$

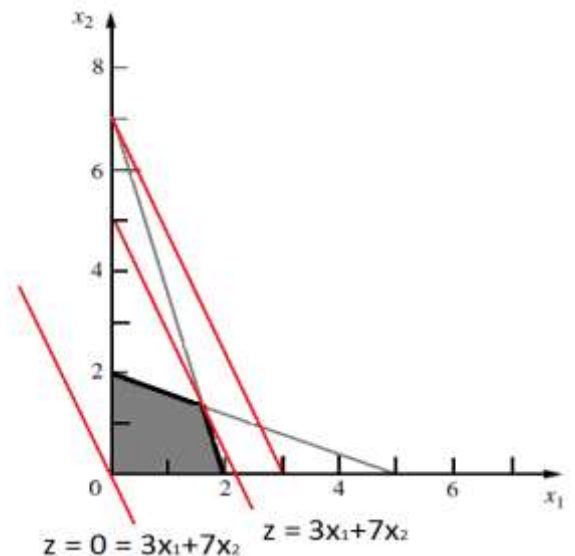
$$7x_1 + 2x_2 \leq 14$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

REŠENJE:

Nacrtamo grafike ograničenja i osenčimo prostor na kome je funkcija definisana a zatim nacrtamo i samu funkciju (slika desno).

Optimalno rešenje se dostiže u tački preseka pravih $2x_1 + 5x_2 = 10$ i $7x_1 + 2x_2 = 14$, odnosno u tački $(\frac{50}{31}, \frac{42}{31})$ i iznosi $\frac{444}{31}$.



PRIMER 15

Sledeće LP probleme rešiti grafičkom metodom

a) $\min (3x_1 - 2x_2)$

pri ograničenjima

$$2x_1 - x_2 \geq 1$$

$$-x_1 + x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

b) $\min x_1 - x_2$

pri ograničenjima

$$x_1 + 2x_2 \leq 6$$

$$-2x_1 + x_2 \geq -1$$

$$x_1 - x_2 \geq 3$$

$$x_1 \geq 0$$

Rešiti i zadatke 1 i 2 grafičkom metodom.

Dualnost u linearnom programiranju

Neka je problem linearnog programiranja zadat u sledećem obliku:

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{ograničenja} & Ax \leq b, \\ & x > 0 \end{array} \quad (1)$$

gde je matrica A dimenzije $m \times n$ sa kolonama K_1, K_2, \dots, K_n i rangom $\text{rang} A = m$.

Problem (1) se naziva PRIMALNIM PROBLEMOM dok se problem oblika

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{ograničenja} & A^T y \leq c \end{array} \quad (1')$$

naziva njegovim DUALNIM PROBLEMOM.

Dualni problem se dalje može transformisati uvođenjem izjednačavajućih promenljivih:

$$\begin{array}{ll} \max & b^T y \\ \text{ograničenja} & A^T y + z = c, \\ & z \geq 0 \end{array} \quad (1'')$$

Teorema (Slaba dualnost):

Za bilo koje dopustive tačke (x_1, x_2, \dots, x_n) i (y_1, y_2, \dots, y_m) problema (P) odnosno problema (D) važi:

$$c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \geq y_1 b_1 + \dots + y_m b_m$$

Teorema (Jaka dualnost):

Ako jedan od problema (P) i (D) ima optimalno rešenje onda i drugi ima optimalno rešenje. Pri tom, za njihova optimalna rešenja važi:

$$c_1 x_1 + \dots + c_n x_n = y_1 b_1 + \dots + y_m b_m$$

Stavovi dualnosti:

- dual dualnog problema je primalni problem.
- ako je X^* optimalno rešenje primalnog problema, odnosno ako je Y^* optimalno rešenje njemu dualnog problema, tada važi: $C \cdot X^* = A \cdot Y^*$.
- ako primalni problem (dualni problem) ima konačno optimalno rešenje, tada i dualni problem (primalni problem) ima konačno optimalno rešenje.
- ako primalni problem (dualni problem) nema ograničeno optimalno rešenje, onda i dualni problem (primalni problem) nema moguće rešenje.

Neophodni uslovi optimalnosti:

Dopustiva tačka (p, q) problema P je njegovo *optimalno rešenje* **akko** postoji tačka (u, v) dopustiva za D takva da su zadovoljeni uslovi komplementarnosti:

$$u(A_{11}p + A_{12}q - b_1) = 0$$

$$(uA_{11} + vA_{21} - c_1)p = 0$$

Dopustiva tačka (u, v) problema D je njegovo optimalno rešenje **akko** postoji tačka (p, q) dopustiva za P takva da su zadovoljeni uslovi komplementarnosti.

PRIMER 16

Odrediti dualni problem ako je zadat sledeći primalni problem:

$$\begin{aligned} \min F(X) &= 25x_1 + 50x_2 \\ \frac{3}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_2 &\geq 100 \\ \text{pri ograničenjima} \quad \frac{1}{2}x_1 + 1 + \frac{1}{2}x_2 &\geq 150, \quad x_i \geq 0, i = 1, 2. \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{4}x_2 &\geq 100 \end{aligned}$$

Rešenje

Primalni problem linearnog programiranja može se matricno prikazati matricno:

$$F(X) = C \cdot X, \quad C = [25 \quad 50], \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{pri ograničenjima:} \quad A \cdot X = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 100 \\ 150 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Dualni problem prikazan matricno je sledećeg oblika:

$$\Phi(Y) = B^T \cdot Y \quad \text{tj.} \quad [100 \quad 150 \quad 100] \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{gde je skup ograničenja } A^T \cdot Y \leq C^T, \text{ tj.} \quad \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 25 \\ 50 \end{bmatrix}$$

PRIMER 17

Odrediti dualni problem sledećeg problema

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - x_2 \\ \text{pri ograničenjima} \quad & x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ & -x_1 + x_2 - x_4 = 1 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

REŠENJE:

Jednačine iz ograničenja zapisaćemo preko nejednakosti:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 &\leq 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leq -1 \\ -x_1 + x_2 - x_4 &\leq 1 \\ x_1 - x_2 + x_4 &\leq -1 \end{aligned}$$

$$b^T = [1, -1, 1, -1] \rightarrow b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$c^T = [1, -1] \rightarrow c = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Dualni problem je oblika

$$\begin{aligned} \max & (y_1 - y_2 + y_3 - y_4) \\ & y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \geq 1 \\ & -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \geq -1 \\ & -y_1 + y_2 \geq 0 \\ & -y_3 + y_4 \geq 0 \\ & y_i \geq 0 \end{aligned}$$

Možemo da uvedemo smenu: $y_1 - y_2 = z_1$, $y_3 - y_4 = z_2$

Tada, dualni problem se može zapisati kao:

$$\begin{aligned} \max & z_1 + z_2 \\ & z_1 - z_2 \geq 1 \\ & -z_1 + z_2 \geq -1 \\ & -z_1 \geq 0 \\ & -z_2 \geq 0 \end{aligned}$$

tj. ograničenja su $z_1 + z_2 = 1$, $z_1 \leq 0$, $z_2 \leq 0$.

Za domaći zadatak:

Naći dual duala i pokazati da je on primalni problem !!!!

PRIMER 18

Primarni problem

$$\begin{aligned} \min & (10x_1 + 5x_2 + 4x_3) \\ \text{(P)} \quad & 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 3 \\ & 4x_1 + \quad + 2x_3 \geq 10 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Dualni problem

$$\begin{aligned} \max & (3y_1 + 10y_2) \\ \text{(D)} \quad & 3y_1 + 4y_2 \leq 10 \\ & 2y_1 \leq 5 \\ & -3y_1 + 2y_2 \leq 4 \\ & y_i \geq 0 \end{aligned}$$

PRIMER 19

Primarni problem

$$\begin{aligned} \max & (12x_1 - 2x_2 - x_4) \\ \text{(P)} \quad & 4x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 2x_4 \leq 3 \\ & -8x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 \leq 9 \\ & -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 7 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

Dualni problem

$$\begin{aligned} \min & (3y_1 + 9y_2 + 7y_3) \\ \text{(D)} \quad & 4y_1 - 8y_2 - 3y_3 \geq 0 \\ & 7y_1 + 2y_2 + 5y_3 \geq 12 \\ & -4y_1 - y_2 + 2y_3 \geq -2 \\ & -2y_1 + 3y_2 + y_3 \geq -1 \\ & y_i \geq 0 \end{aligned}$$

PRIMER 20

Rešiti sledeće LP probleme

$$\begin{aligned} \min & (-x_1 - x_2 + x_3) \\ \text{a)} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 \leq -2 \\ & x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max & (x_2 - x_3) \\ \text{b)} \quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{aligned}$$

PRIMER 21

- a) Naći dualne probleme problemima iz zadatka 14 kao i duale njihovih duala.
 b) Naći dual za primer br 3 a zatim ga rešiti nekom metodom.

PRIMER 22

Rešiti problem P

$$\min \quad 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

pri ograničenjima

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + 3x_5 \geq 4$$

$$2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 \geq 3$$

$$x_i \geq 0$$

rešavajući njegov dual grafičkim putem.

PRIMER 23

Da li je $x_1 = 360$, $x_2 = 150$, $x_3 = 0$ optimalno rešenje problema

$$\max x_1 + x_2 + x_3$$

pri ograničenjima

$$2x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 2100$$

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 2100$$

$$6x_2 + 2x_3 \leq 900$$

$$3x_2 + 4x_3 \leq 900$$

$$x_3 \leq 75$$

Rešenje

Dualni problem početnog problema je oblika

$$\min 2100y_1 + 2100y_2 + 900y_3 + 900y_4 + 75y_5$$

pri ograničenjima

$$2y_1 + 5y_2 \geq 1$$

$$5y_1 + 2y_2 + 6y_3 + 3y_4 \geq 1$$

$$3y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_3 + 1y_5 \geq 1$$

$$y_i \geq 0, i = 1, \dots, 5$$

Pokušajmo da nađemo dopustivu tačku (y_1, y_2, y_3, y_4) duala koja sa (x_1, x_2, x_3) zadovoljava uslove komplementarnosti:

$$(2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2100)y_1 = 0$$

$$(5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 2100)y_2 = 0$$

$$(6x_2 + 2x_3 - 900)y_3 = 0$$

$$(3x_2 + 4x_3 - 900)y_4 = 0$$

$$(x_3 - 75)y_5 = 0$$

$$(2y_1 + 5y_2 - 1)x_1 = 0$$

$$(5y_1 + 2y_2 + 6y_3 + 3y_4 - 1)x_2 = 0$$

$$(3y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_3 + 1y_4 - 1)x_3 = 0$$

Druga, treća i osma jednakost su zadovoljene. Rešavamo preostali sistem.

Iz prve, četvrte i pete jednakosti sledi da je $y_1 = 0$, $y_3 = 0$, $y_5 = 0$. Na osnovu šeste jednačine dobija se da je $y_2 = \frac{1}{5}$, odnosno na osnovu sedme $y_4 = \frac{1}{5}$.

Kako je $(0, \frac{1}{5}, 0, \frac{1}{5}, 0)$ dopustivo rešenje problema D sledi da je $(360, 150, 0)$ optimalno rešenje problema P.

Simpleks metoda

Prvi je predložio Dantzig 1947.god.

Ideja simplex metode za rešavanje problema linearnog programiranja je u pretraživanju mogućih rešenja. Polazi se od jednog takvog rešenja i formira se niz sve boljih bazisno mogućih rešenja.

Simplex metoda ima više verzija, prvo ćemo koristiti tablični zapis simplex metode.

Rešavamo problem:

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

uz pretpostavku da je $\text{rang}A = m$, tj sistem $Ax = b$ je saglasan i ne sadrži suvišne jednačine.

Algoritam simplex metode

Korak0: Formirati simplex tablicu za zadati problem (LP tablicu).

Korak1: Postaviti brojač na nulu ($k=0$)

Proveriti da li je $c_j^k \geq 0$ za svako j , ako jeste preći na Korak6.

Korak2: Ako je za svako j $c_j^k < 0$ proveriti da li je $a_{ij}^k \leq 0$.

Ako jeste preći na Korak7.

Korak3: Naći $r = \{1, \dots, n\}$ za koje je $c_r^k < 0$. (r -pivotni, s -stožerni element)

Najčešće se uzima $c_r^k = \min \{c_a^k \mid a = 1, \dots, n, x = (x_1, \dots, x_n)\}$

Naći $s = \{1, \dots, m\}$ takvo da je

$$\frac{b_s^k}{a_{sr}^k} = \min \left\{ \frac{b_i^k}{a_{ir}^k} \mid a_{ir}^k \geq 0 \right\} \text{ i preći na Korak4}$$

Korak4: Elementarnim transformacijama napraviti $(k + 1)$ -vu simplex tablicu, odnosno podeliti s -tu vrstu sa a_{sr}^k ($a_{sr}^{k+1} = 1$) a ostalim vrstama dodati s -tu vrstu pomnoženu odgovarajućim koeficijentima tako da se dobije da je $a_{ir}^{k+1} = 0, i \neq s, c_r^{k+1} = 0$. Preći na Korak5.

Korak5: Zameniti k sa $k+1$ i preći na Korak1.

Korak6: Bazično rešenje koje odgovara k -toj tablici je optimalno.

Vrednost funkcije je z_0^k . STOP

Korak7: Funkcije cilja je neograničena odozdo. STOP.

LP tablica je dimenzije $(n + 1) \times (m + 1)$

z	C1	c2	cn
b1	A11	a12	a1n
b2	A21	a22			a2n

bm	am1	am2	amn

- $\text{rang}A = m$: postoji m linearno nezavisnih kolona matrice. Svaki skup m linearno nezavisnih kolona se naziva bazom matrice A.

Matrica A se sastoji iz n kolona K_i , $A = [K_1 \ K_2 \ \dots \ K_n]$.

Neka su $A_B = \{K_{j_1}, \dots, K_{j_m}\}$ kolone koje čine bazu matrice, skup $B = \{j_1, \dots, j_m\}$ predstavlja indekse kolona koje čine bazu.

- Promenljive se nazivaju bazičnim promenljivim a ostale nebazičnim u odnosu na bazu B. Bazično rešenje se dobija kada se nebazične promenljive izjednače sa nulom i sistem $Ax=b$ reši po bazičnim promenljivim.
- Polazni sistem možemo da zapišemo na sledeći način:

$$A_B x_B + A_N x_N = b$$

gde su sa x_B označene bazične promenljive, a sa x_N nebazične promenljive.

Pomnožimo celu formulu sa A_B^{-1} , dobićemo da je

$$x_B + A_B^{-1} A_N x_N = A_B^{-1} b$$

Ako izjednačimo nebazične promenljive sa nulom, polazni problem se svodi na problem

$$x_B^* = A_B^{-1} b, x_N^* = 0.$$

PRIMER 24

$$\begin{aligned} \min f(x), f(x) &= -x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + x_2 &\leq 1 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Rešenje:

Sa obzirom da se u ograničenjima pojavljuje znak nejednakosti, ograničenja se svode na jednakosti uvođenjem nenegativnih veštačkih promenljivih:

$$\begin{aligned} \min f(x), f(x) &= -x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_4 &= 3 \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Odgovarajuća LP tablica je

funkcija cilja	originalne promenljive		veštačke promenljive	
	x_1	x_2	x_3	x_4
0	-1	-2	0	0
1	-1	1	1	0
3	1	1	0	1

Iz uslova $r_2 = -2 < 0$ sledi da druga kolona može da uđe u bazu.

Budući da je $1/1 < 3/1$ sledi da bazu napušta 4.kolona.

Pivotiramo oko elemenata $a_{12} = 1$ čime dobijamo novu simpleks tablicu:

funkcija cilja	originalne promenljive		veštačke promenljive	
	x_1	x_2	x_3	x_4
2	-3	0	2	0
1	-1	1	1	0
2	2	0	-1	1

Kako je dalje $r_1 = -3 < 0$, pivotiranjem oko $a_{21} = 2$ dobijamo:

funkcija cilja	originalne promenljive		veštačke promenljive	
	x_1	x_2	x_3	x_4
5	0	0	$1/2$	$3/2$
2	0	1	$1/2$	$1/2$
1	1	0	$-1/2$	$1/2$

Optimalno rešenje je (1,2,0,0) a optimalna vrednost -5.

PRIMER 25

$$\begin{aligned} \max f(x), f(x) &= 3x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\leq 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\leq 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Rešenje:

Prvo uvodimo izjednačavajuće nenegativne veštačke promenljive x_4, x_5, x_6 , a zatim transformišemo funkciju cilja na problem minimizacije

$$\begin{aligned} \min f(x), f(x) &= -3x_1 - x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 &= 5 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Formiramo LP tablicu:

fja cilja	originalne promenljive			veštačke promenljive		
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	-3	-1	-3	0	0	0
2	2	1	1	1	0	0
5	1	2	3	0	1	0
6	2	2	1	0	0	1

Bazu čine veštačke promenljive (za sada).

Primitimo da u funkciji cilja imamo negativnih vrednosti ($\{-3, -1, -3\}$), tražimo pivot u npr. prvoj koloni. Pivot se traži iz relacije $\min\left\{\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}}, \frac{b_3}{a_{31}}\right\} = \left\{\frac{2}{1}, \frac{5}{1}, \frac{6}{2}\right\} = 2$. Pivot je a_{11} . Prvo ograničenje delimo sa a_{11} . Tako korigovano prvo ograničenje množimo sa 3 i dodajemo funkciji cilja, oduzimamo od drugog ograničenja, odnosno množimo sa (-2) i dodajemo trećem ograničenju. Na ovaj način promenljiva x_1 ulazi u bazu.

fja cilja	originalne promenljive			veštačke promenljive		
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
3	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0
1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
4	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0
4	0	1	0	-1	0	1

Sada se je samo c_3 negativno. Biramo pivot u koloni koja odgovara promenljivoj x_3 koja ulazi u bazu. Pivot je $5/2$.

fja cilja	originalne promenljive			veštačke promenljive		
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
$27/5$	0	$14/10$	0	$6/5$	$3/5$	0
$1/5$	1	$1/5$	0	$3/5$	0	0
$8/5$	0	$3/5$	1	$-1/5$	$2/5$	0
4	0	1	0	-1	0	1

Konačno, promenljive x_1 i x_3 su u bazi, njihove vrednosti su $x_1 = 1/5$, $x_3 = 8/5$, dok promenljiva x_2 nije u bazi i njena vrednost je zbog toga $x_2 = 0$. Veštačka promenljiva x_6 je takođe u bazi i ima vrednost 4 i ona ne utiče na vrednost funkcije cilja koja iznosi $-27/5$.

PRIMER 26

$$\begin{aligned} \max z, z &= x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 - x_6 - 3x_7 \\ 3x_3 + 2x_4 + x_5 + x_6 &= 6 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 &= 10 \\ x_1 - x_6 &= 0 \\ x_3 + x_6 + x_7 &= 6 \\ x_i &\geq 0, i = 1, \dots, 7 \end{aligned}$$

Rešenje:

Tražimo minimum funkcije $w = -z = -x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 + x_6 + 3x_7$ pri datim ograničenjima.

Formiramo LP tablicu

funkcija cilja	originalne promenljive						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	-1	1	-1	3	-1	1	3
6	0	0	3	2	1	1	0
10	0	1	2	-1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	-1	0
6	0	0	1	0	0	1	1

Želimo da eliminišemo negativne vrednosti u "nultom" redu tablice. Primitimo da tablica ima bazne kolone (x_1, x_2, x_4 i x_7). Prvu vrstu pomnožimo sa 1 i dodamo je nultoj vrsti (dobijamo $c_1^0 = 0$). Isti postupak ponovimo sa trećom vrstom (dobićemo da je $c_3^0 = 0$). Drugu vrstu pomnožimo sa -1 i dodamo nultoj vrsti (rezultat je $c_2^0 = 0$), dok četvrtu vrstu množimo sa -3 ($c_7^0 = 0$). Kao rezultat dobijamo novu tablicu:

funkcija cilja	originalne promenljive						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-22	0	0	-3	6	0	-2	0
6	0	0	3	2	1	1	0
10	0	1	2	-1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	-1	0
6	0	0	1	0	0	1	1

Bazično rešenje koje odgovara ovoj tablici je (0,10,0,0,6,0,6). Ovo rešenje nije optimalno (imamo negativnih vrednosti u nultoj vrsti). Primenjujemo korak 4 iz algoritma za $s = 1$ i $r = 3$ i dobijamo drugu simplex tablicu.

funkcija cilja	originalne promenljive						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-16	0	0	0	8	1	-1	0
2	0	0	1	2/3	1/3	1/3	0
6	0	1	0	-7/2	-2/3	-2/3	0
0	1	0	0	0	0	-1	0
4	0	0	0	-2/3	-1/3	2/3	1

Bazično rešenje koje odgovara ovoj tablici je (0,6,2,0,0,0,4). Rešenje nije optimalno, primenom koraka 4 za $s = 4$, $r = 6$ dobijamo treću simplex tablicu

funkcija cilja	originalne promenljive						
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
-10	0	0	0	7	1/2	0	3/2
0	0	0	1	1	1/2	0	-1/2
10	0	1	0	-3	-1	0	1
6	1	0	0	-1	-1/2	0	3/2
6	0	0	0	-1	-1/2	1	3/2

Bazično rešenje koje odgovara ovoj tablici je $(6, 10, 0, 0, 6, 0)$. Ovo rešenje je optimalno, optimalna vrednost funkcije w je 10. Sledi da maksimalna vrednost funkcije z je -10.

PRIMER 27

Fabrika proizvodi 3 vrste paketa: A, B i C. Model A zahteva 8č obrade, 5č lakiranja i 6č sušenja. Model B zahteva 6č obrade, 4č lakiranja i 2č sušenja. Model C zahteva 5č obrade, 2č lakiranja i 4č sušenja. Stolar ima na raspolaganju ukupno 96č za obradu, 44č za lakiranje i 58č za sušenje. Zarada po jedinici modela A, B i C je 380eur, 260eur i 220 eur.

Kojom će se kombinacijom proizvodnje postići maksimalna dobit?

Formirati matematički model i rešiti problem.

Rešenje:

Matematički model za dati problem je sledećeg oblika:

$$\begin{aligned} \max & 380x_1 + 260x_2 + 220x_3 \\ & 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 \leq 96 \\ & 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 44 \\ & 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 58 \\ & x_i \geq 0, \forall i = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Odgovarajuća LP tablica je:

funkcija cilja	originalne promenljive			veštačke promenljive		
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	-380	-260	-220	0	0	0
96	8	6	5	1	0	0
44	5	4	2	0	1	0
58	6	2	4	0	0	1

Biramo $c_1^0 = -380 < 0$, dalje dobijamo $\frac{b_s}{a_{rs}} = \min \left\{ \frac{96}{8}, \frac{44}{5}, \frac{58}{6} \right\} = 8.8$ ($s = 2$).

Uzimamo da je pivot a_{21} i elementarnim transformacijama anuliramo sve vrednosti u prvoj koloni.

Nova tablica, $k = 1$

funkcija cilja	originalne promenljive			veštačke promenljive		
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
3344	0	44	-68	0	76	0
128/5	0	-2/5	9/5	1	-8/5	0
44/5	1	4/5	2/5	0	1/5	0
26/5	0	-14/5	8/5	0	-6/5	1

Kako je $c_3^1 = -68 < 0$, dobija se da je pivot a_{33}

$k = 2$

funkcija cilja	originalne promenljive			veštačke promenljive		
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
3565	0	-75	0	0	25	85/2
79/4	0	11/4	0	1	-1/4	-9/8
15/2	1	3/2	0	0	1/2	-1/4
13/4	0	-7/4	1	0	-3/4	5/8

$k = 3$

funkcija cilja	originalne promenljive			veštačke promenljive		
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
3940	50	0	0	0	50	30
6	-11/6	0	0	1	-7/6	-2/3
5	2/3	1	0	0	1/3	-1/6
12	7/6	0	1	0	-1/6	1/3

Dakle, rešenje problema je $(A, B, C) = (0, 5, 12)$, očekivana zarada iznosi 3940eur.

PRIMER 28

Rešiti sledeći problem simpleks metodom:

pri ograničenju

$$\max 4x_1 + 6x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 11$$

$$x_1 + x_2 \leq 27$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 90$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Rešenje

Uvodimo izravnajuće promenljive $s_1, s_2, s_3 \geq 0$

$$-x_1 + x_2 + s_1 = 11$$

$$x_1 + x_2 + s_2 = 27$$

$$2x_1 + 5x_2 + s_3 = 90$$

I posmatramo problem minimizacije $-4x_1 - 6x_2$

funkcija cilja	originalne promenljive		veštačke promenljive		
b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
0	-4	-6	0	0	0
11	-1	1	1	0	0
27	1	1	0	1	0
90	2	5	0	0	1

Vidimo da bazu problema čine veštačke promenljive. Uz promenljivu x_2 u funkciji cilja nalazi se najmanja negativna vrednost. Tražimo pivot u koloni koja odgovara toj promenljivoj. Pivot se bira iz uslova $\min \left\{ \frac{11}{-1}, \frac{27}{1}, \frac{90}{5} \right\} = 11$. Dakle, pivot je a_{12} . x_2 ulazi u bazu, promenljiva s_1 izlazi iz baze. Nakon pivotiranja dobijamo tablicu

funkcija cilja	originalne promenljive		veštačke promenljive		
b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
66	-10	0	6	0	0
11	-1	1	1	0	0
16	2	0	-1	1	0
35	7	0	-5	0	1

Sada je u funkciji cilja uz promenljivu x_1 negativna vrednost. Ona ulazi u bazu. Pivot je $\min \left\{ \frac{16}{2}, \frac{35}{7} \right\} = \{8, 5\} = 5$ a_{21} , dakle s_2 izlazi iz baze. Nova tablica je

funkcija cilja	originalne promenljive		veštačke promenljive		
b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
116	0	0	-8/7	0	10/7
16	0	1	2/7	0	1/7
6	0	0	3/7	1	-2/7
5	1	0	-5/7	0	1/7

Simpleks metod nije završen. Uz s_1 se u funkciji cilja nalazi negativna vrednost. Analogno prethodnom postupku, s_1 ulazi u bazu.

funkcija cilja	originalne promenljive		veštačke promenljive		
b	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
132	0	0	0	8/3	2/3
12	0	1	0	-2/3	1/3
14	0	0	1	7/3	-2/3
15	1	0	0	5/3	-1/3

Rešenje problema je $x_1 = 15, x_2 = 12, s_1 = 14, s_2 = 0, s_3 = 0$.

Funkcija cilja ima vrednost 132.

PRIMER 29

Rešiti sledeći problem simpleks metodom:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ p.o. \quad & 4x_1 + 5x_2 \leq 16 \\ & -2x_1 + 3x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Hint: Uvesti izjednačavajuće promenljive. Optimalno rešenje je $(3/2, 2)$ a vrednost funkcije iznosi 9.

PRIMER 30

Rešiti sledeći problem simpleks metodom:

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 2x_2 \\ p.o. \quad & x_1 - x_2 \leq 3 \\ & -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ & x_1 \leq 4 \\ & x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Optimalno rešenje je $(4, 4)$ a vrednost funkcije iznosi 20.

PRIMER 31

Rešiti sledeći problem simpleks metodom:

pri ograničenju

$$\max \quad 2x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 10 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 &\leq 20 \\ x_2 + 2x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Rešenje je $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) = (5, 0, \frac{5}{2}, 0, 0, 0)$. Funkcija cilja ima vrednost 15.

PRIMER 32

Rešiti sledeći problem simpleks metodom:

pri ograničenju

$$\max 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 30$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 60$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Rešenje je $(x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3) = (3, 18, 0, 0, 1)$. Funkcija cilja ima vrednost 30.

PRIMER 33

Rešiti sledeći problem simpleks metodom:

$$\max 2x_1 + x_2 + x_3$$

$$p.o. \quad 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$$

$$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 50$$

$$2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 12$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Optimalno rešenje je $(5, 0, 3)$ a vrednost funkcije iznosi 20.

PRIMER 34

Rešiti primere 4 i 5 simplex metodom.

Dualna simplex metoda

Dat je problem linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned}$$

Kome odgovara LP tablica

-Z	c1	c2	cn
b1	a11	a12	a1n
b2	a21	a22			a2n

bm	Am1	am2	amn

Tablicu nazivamo *dualnom simplex tablicom* ako ona među kolonama $1, \dots, n$ sadrži m različitih bazičnih kolona i važi. Ukoliko je ispunjeno $c_1 \geq 0, \dots, c_n \geq 0$ i $b_1 \geq 0, \dots, b_n \geq 0$ onda je dualna simplex tablica istovremeno i simplex tablica pa ja odgovarajuće dopustivo rešenje takođe optimalno.

Algoritam dualne simplex metode

Korak0: Staviti da je $k=0$. k -ta iteracija se dobija na sledeći način.

Korak1: Ispitati da li je $b_i^k \geq 0, i = 1, \dots, m$. Ako jeste preći na korak6.

Korak2: Za svako i za koje je $b_j^k < 0$ ispitati da li je $a_{ij} \geq 0$ za sve $j = 1, \dots, n$.

Ako takvo b_j^k postoji preći na korak 7.

Korak3: Odrediti $s \in \{1, \dots, m\}$ za koje je $b_s^k < 0$. Naći $r \in \{1, \dots, n\}$ takvo da je

$$\frac{c_r^k}{a_{sr}^k} = \max \left\{ \frac{c_j^k}{a_{sj}^k} \mid a_{sj}^k < 0 \right\}$$

Korak4: Dobiti $(k+1)$ -vu dualnu simplex tablicu sledećim elem. transformacijama k -te dualne simplex tablice:

Podeliti s -tu vrstu sa a_{sr}^k . Ostalim vrstama, uključujući i prvu, dodati s -tu vrstu pomnoženu odgovarajućim koeficijentima tako da se dobije $a_{ir}^{k+1} = 0$ za $i \neq s$ i $c_r^{k+1} = 0$.

Korak5: Zameniti k sa $k+1$ i preći na korak1.

Korak6: Dobijena dualna simplex tablica je ujedno i simplex tablica.

Bazično rešenje koje joj odgovara je optimalno, vrednost funkcije cilja je z_0^k . STOP.

Korak7: Skup dopustivih rešenja posmatranog problema je prazan. STOP.

PRIMER 35

$$\begin{aligned} \min f(x), f(x) &= 9x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{pri ograničenjima} \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &\geq -1 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 &\geq 5 \\ x_i &\geq 0, \forall i = 1,2,3 \end{aligned}$$

Rešenje:

Uvodimo izjednačavajuće promenljive i svodimo problem na kanonski oblik.

Dobijamo problem:

$$\begin{aligned} \min f(x), f(x) &= 9x_1 + x_2 + x_3 \\ \text{pri ograničenjima} \\ -3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 1 \\ -4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 &= -5 \\ x_i &\geq 0, \forall i = 1,2,3,4,5 \end{aligned}$$

Novom problemu odgovara dualna simplex tablica

funkcija cilja	originalne promenljive				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	9	1	1	0	0
1	-3	1	-2	1	0
-5	-4	-2	1	0	1

Primenimo algoritam za dualni simplex:

funkcija cilja	originalne promenljive				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-5/2	7	0	3/2	0	1/2
-3/2	-5	0	-3/2	1	1/2
5/2	2	1	-1/2	0	-1/2

Dobijena tablica nije simplex tablica. Nastavljamo sa primenom algoritma:

funkcija cilja	originalne promenljive				
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-4	2	0	0	1	0
1	10/3	0	1	-2/3	-1/3
3	11/3	1	0	-1/3	-2/3

Dobijena tablica jeste simplex tablica. Bazično dopustivo rešenje koje joj odgovara je (0,3,1,0,0) a optimalna vrednost funkcije z je 4.

PRIMER 36

Rešiti dualnom simplex metodom

$$\begin{aligned} & \min x_1 + x_2 + x_3 \\ & \text{pri ograničenjima} \\ & x_1 - x_2 - 4x_3 \leq 1 \\ & -x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 3 \\ & x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 0 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

PRIMER 37

Dva tipa proizvoda, A i B, mogu se izrađivati na dva tipa mašina, P i Q. Mašina P može da proizvede 4 jedinice proizvoda A i 3 jedinice proizvoda B na sat. Mašina Q može da proizvede 1 jedinicu proizvoda A i 4 jedinice proizvoda B na sat. Troškovi eksploatacije mašine P su 17, a mašine Q 14 novčanih jedinica na sat. Preduzeću je neophodno najmanje 7 jedinica proizvoda A i 15 jedinica proizvoda B. Koliko sati rada svake mašine je neophodno da bi zahtevi preduzeća bili zadovoljeni i da bi troškovi eksploatacije bili minimalni?

Rešenje:

Promenljive x_1 i x_2 predstavljaju brojeve sati rada mašina P i Q respektivno.

Matematički model problema:

$$\begin{aligned} & \min f(x), f(x) = 17x_1 + 14x_2 \\ & \text{pri ograničenjima} \\ & 4x_1 + x_2 \geq 7 \\ & 3x_1 + 4x_2 \geq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

PRIMER 38

Proizvodno preduzeće raspolaže sa 3 vrste sirovina: od prve ima 120, od druge 80 i od treće 240 jedinica. Sirovine se koriste za izradu 5 vrsta proizvoda. Pri izradi jedinice prvog proizvoda potroše se jedna jedinica prve, dve jedinice druge i četiri jedinice treće sirovine. Pri izradi jedinice drugog proizvoda potroše se pet jedinica druge i jedna jedinica treće sirovine. Pri izradi jedinice trećeg proizvoda potroše se četiri jedinice prve, dve jedinice druge i pet jedinica treće sirovine. Pri izradi jedinice četvrtog proizvoda potroše se dve jedinice prve i jedna jedinica druge sirovine. Pri izradi jedinice petog proizvoda potroše se četiri jedinice prve i četiri jedinice treće sirovine. Jedinicu prvog proizvoda preduzeće prodaje po 20, drugog po 10, trećeg po 40, četvrtog po 20 i petog po 15 novčanih jedinica. Kako preduzeće treba planirati proizvodnju da bi od prodaje imalo najveći prihod?

Dvofazna modifikacija simplex metode

Dat je problem linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} \min c^T x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Ako je poznata jedna dopustiva baza, problem se svodi na kanonski oblik i odgovara simpleks metodi koju smo ranije radili. Cilj ovog postupka je da pomoću simplex metode rešimo problem koji nema poznatu bazu.

Pretpostavimo da je $b \geq 0$ (ako nije pomnožimo sve jednačine sa -1). Uočavamo pomoćni problem linearnog programiranja:

$$\begin{aligned} \min e^T w \\ Ax + w = b \\ x \geq 0, w \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

gde je $e = (1, \dots, 1) \in R^m$, $w \in R^m$ (w je vektor veštačkih promenljivih).

Skup dopustivih rešenja problema (2) je neprazan, i funkcija cilja je ograničena nulom odozdo.

Algoritam modifikacije dvofazne simplex metode

I Faza

Za problem (1) formiramo problem (2) kome se pridružuje LP tablica.

LP-tablica se svodi na simplex tablicu eliminacijom nula iz nulte vrste a zatim se prelazi na algoritam za rešavanje simplex metode.

Kako je funkcija cilja ograničena odozdo razlikujemo dva slučaja:

1. Optimalna vrednost je veća od nule. Tada problem (1) nema dopustivih rešenja i postupak se završava.
2. Optimalna vrednost je jednaka nuli (sledi da su u optimalnom bazičnom dopustivom rešenju sve veštačke promenljive jednake nuli). Prelazi se na II fazu.

II Faza

Korak1:

Iz poslednje simplex tablice dobijene u I fazi uklanjaju se sve veštačke promenljive, a nulta vrsta se zamenjuje vrstom $[0|c_1 \dots c_n \ 0 \dots 0]$ koja ima $n+k+1$ element, pri čemu je k broj bazičnih promenljivih. Dobijena LP tablica se svodi na simplex tablicu eliminacijom onih $c_j \neq 0$ koji odgovaraju bazičnim promenljivim.

Korak2:

Ukoliko je $k=0$ ići na korak3.

U suprotnom u simplex tablici postoje bazične kolone koje odgovaraju veštačkim promenljivim. Uočimo jednu od njih, koja npr. odgovara veštačkoj promenljivoj w_s . Neka ta kolona sadrži jedinicu u vrsti v . Razlikujemo dva slučaja:

1. Svi elementi vrste v osim bazične su jednaki nuli. Tada se vrsta v i kolona koja odgovara promenljivoj w_s izostavljaju iz simplex tablice
2. Neka je osim bazične jedinice na primer r -ti element vrste v različit od nule. Tada je $i \neq 0$ jer je w_s na nivou nula, i tada r -ta kolona odgovara veštačkoj promenljivoj jer su izostavljene sve kolone koje odgovaraju nebazičnim promenljivim. Pomoću stožerne transformacije, sa stožernim elementom u preseku vrste v i kolone r , učiniti r -tu kolonu bazičnom. Zatim, izostaviti kolonu koja odgovara promenljivoj w_s jer se radi o nebazičnoj koloni koja odgovara veštačkoj promenljivoj. Zameniti k sa $k+1$ i preći na korak 2.

Korak3:

Dobijena simplex tablica sadrži samo kolone koje odgovaraju promenljivim iz problema (1). Primeniti algoritam za simplex kanonsku metodu.

PRIMER 39

Rešiti sledeći problem korišćenjem Simpleks metode:

$$\begin{aligned} \min z, z &= 2x_1 + 1x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 3x_4 + x_5 &= 17 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 &= 7 \end{aligned}$$

Rešenje:

Proverimo da li su sve vrednosti vektora b ne-negativne. Ukoliko za neko b_i važi $b_i < 0$ čitavu jednačinu množimo sa -1 .

Faza I

Dodajemo veštačke promenljive $x_6 \geq 0, x_7 \geq 0$ kako bi u ograničenjima imali jediničnu podmatricu:

$$\begin{aligned} \max w, w &= x_6 + x_7 \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 3x_4 + x_5 + x_6 &= 17 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 + x_5 + x_7 &= 7 \end{aligned}$$

Budući da je potrebno da sistem bude u kanonskoj formi na početku, od funkcije cilja oduzimamo drugu i treću jednačinu. Postupci minimiziranja funkcije w slični su kao kod određivanja minimuma funkcije z .

originalne promenljive					veštačke promenljive		
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	f
-5	-3	-18	-4	-2	0	0	-24
4	2	13	3	1	1	0	17
1	1	5	1	1	0	1	7

Iteracija 1 (faza I)

Odredimo pivot tablice (kolona x_1 , I ograničenje) i podelimo drugu vrstu sa 4, a zatim elementarnim transformacijama eliminišemo sve vrednosti kolone x_1 . Ovakvim postupkom dobijamo novu bazu koju čine x_1 i x_7 . Ovakvim postupkom vrednost funkcije se povećava sa -24 na $-11/4$.

originalne promenljive					veštačke promenljive		F
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	-1/2	-7/4	-1/4	-3/4	5/4	0	-11/4
1	1/2	13/4	3/4	14	1/4	1	17/4
0	0	-9/2	-1/2	7/2	-1/2	0	11/4

U nastavku prve faze primetimo da je $c_2 < 0$ i stoga biramo pivota iz kolone x_2 . Pivot je jedinstven, a_{12} . Elementarnim transformacijama kolona x_2 ulazi u bazu dok kolona x_7 iz nje izlazi:

originalne promenljive					veštačke promenljive		F
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
0	0	0	0	0	1	1	0
1	0	3/2	1/2	-1/2	1/2	-1	3/2
0	1	7/2	1/2	3/2	-1/2	2	11/2

Rešenje dobijene simpleks tabele je $w = 0$ i $x_6 = x_7 = 0$. Prelazi se na drugu fazu.

Kolone x_6 i x_7 mogu da se eliminišu sa obzirom da nisu u bazi.

Umesto trenutne funkcije cilja unosi se početna funkcija cilja. Slično kao i u prethodnim zadacima, sa obzirom da su koeficijenti funkcije cilja koji odgovaraju baznim vektorima nenegativni, svešćemo ih na nule elementarnim transformacijama (drugi red obojen u plavo).

originalne promenljive					F
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	1	2	1	4	0
0	0	-9/2	-1/2	7/2	-17/2
1	0	3/2	1/2	-1/2	3/2
0	1	7/2	1/2	3/2	11/2

Faza II

Primetimo da je $c_3 < 0$. Pivot je polje a_{32} . Rešavamo LP problem Simplex metodom.

originalne promenljive					f
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
3	0	0	1	2	-4
2/3	0	1	1/3	-1/3	1
-7/3	1	0	-2/3	8/3	2

Dakle, funkcija cilja ima vrednost 4 koju dostiže za $x_2 = 2$ i $x_3 = 1$ dok su ostale promenljive jednake nuli.

PROBLEM 40

Rešiti sledeći problem Simpleks metodom

$$\min z, z = 10x_1 + 10x_2 + 20x_3 + 30x_4$$

$$x_1 + x_3 + x_4 = 1$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 2$$

$$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 7$$

Rešenje:

$$f_{obj} = 4, x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$$

PRIMER 41

$$\min f(x), f(x) = 2x_1 + 3x_3 + x_4$$

$$-x_2 - x_3 + x_4 = 3$$

$$p.o. \quad 2x_1 + 2x_3 + 4x_4 = 12$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 3$$

$$x_i \geq 0 \quad i = 1, 2, 3, 4$$

Rešenje:

Problem nije u kanonskom obliku, zato primenjujemo fazu I:
rešavamo pomoćni (pridruženi) problem, $\min w$

$$\begin{aligned} \min w(x), \quad w(x) &= x_5 + x_6 + x_7 \\ p.o. \quad & \begin{aligned} -x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ 2x_1 + 2x_3 + 4x_4 + x_6 &= 12 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_7 &= 3 \\ x_i &\geq 0 \quad i = 1, \dots, 7 \end{aligned} \end{aligned}$$

Problemu $\min w$ odgovara LP tablica:

funkcija cilja	originalne promenljive				veštačke promenljive		
$-w$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	0	0	0	1	1	1
3	0	-1	-1	1	1	0	0
12	2	0	2	4	0	1	0
3	1	1	2	1	0	0	1

Faza1:

Želimo da eliminišemo jedinice koje se nalaze u funkciji cilja:

I, II i III vrstu pomnožimo sa -1 i dodamo funkciji cilja. Ovim postupkom dobijamo novu tablicu na koju primenjujemo simpleks algoritam.

$k = 0$

funkcija cilja	originalne promenljive				veštačke promenljive		
$-w$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	0	0	0	0	1	1	1
-18	-3	0	-3	-6	0	0	0
3	0	-1	-1	1	1	0	0
12	2	0	2	4	0	1	0
3	1	1	2	1	0	0	1

$k = 1$

$s = 3$
 $r = 1$

-9	0	3	3	-3	0	0	3
3	0	-1	-1	1	1	0	0
6	0	-2	-2	2	0	1	-2
3	1	1	2	1	0	0	1

$k = 2$

$s = 1$
 $r = 4$

0	0	0	0	3	0	0	3
3	0	-1	-1	1	1	0	0
0	0	0	0	0	-2	1	-2
0	1	2	3	0	-1	0	1

U funkciji cilja više nemamo negativnih vrednosti, dakle (0,0,0,3,0,0,0) je optimalno rešenje. Optimalna vrednost funkcije w je nula pa prelazimo na drugu fazu.

II Faza

Kolone koje odgovaraju nebazičnim promenljivim x_5 i x_7 su nebazične pa se mogu obrisati. (korak1).

b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	0	0	0	3	0	0
F	2	0	3	4	0	0
3	0	-1	-1	1	1	0
0	0	0	0	0	-2	1
0	1	2	3	0	-1	0

Slično, može se oduzi I kolona 6 sa obzirom da su u 2 redu samo nule (izuzev polja a_{26}).

Dodajemo funkciju cilja sa početka zadatka

b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	3
F	2	0	3	4
3	0	-1	-1	1
0	0	0	0	0
0	1	2	3	0

Oduzimamo prvi red pomnožem brojem 4 i treći red pomnožem brojem dva od funkcije cilja.

b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0	3
F-12	0	2	1	0
3	0	-1	-1	1
0	0	0	0	0
0	1	2	3	0

Dobijena simpleks tabela je konačna simpleks tabela.

Bazično rešenje koje odgovara ovoj tablici je (0,0,0,3) i ono je optimalno. Optimalna vrednost funkcije z je 12.

PRIMER 42

Rešiti dvofaznom modifikacijom simpleks metode sledeće probleme linearnog programiranja

a)

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_1 - 3x_2 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 \geq 3 \\ & x_1 - x_2 + x_3 \geq 2 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \max \quad & 5x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4 + 7x_5 \\ & 3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ & x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ & 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7 \\ & x_i \geq 0 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \min \quad & -x_1 + 2x_2 \\ & 5x_1 - 2x_2 \leq 3 \\ & x_1 + x_2 \geq 1 \\ & -3x_1 + x_2 \leq 3 \\ & -3x_1 - 3x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

PRIMER 43

Rešiti simpleks metodom, dualnom simpleks metodom ili dvofaznom modifikacijom simpleks metode sledeće probleme

a) $\max 2x_1 - x_2$
 $0 \leq x_1 + x_2 \leq 6$
 $2 \leq -x_1 + 2x_2 \leq 10$
 $x_1 - x_2 \leq 0$
 $-2 \leq x_1$
 $1 \leq x_2 \leq 5$

b)

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 + 2x_2 + x_3 \\ & x_1 + x_3 > -1 \\ & x_2 \leq 4 \\ & x_2 - 3 \geq -4 \\ & -x_1 + x_2 - x_3 \leq 5 \\ & x_i \geq 0 \quad \text{dualni problem (0,4,8)} \end{aligned}$$

c) $\max -x_1 + x_2$
 $-x_1 + x_2 \leq 5$
 $x_1 - 2x_2 \leq 9$

$$\begin{aligned} 0 \leq x_1 \leq 6 \\ 0 \leq x_2 \leq 8 \end{aligned}$$

LP problem sa parametrom

PRIMER 44

Pretpostavimo da imamo neku kompaniju koja bavi proizvodnjom stolica i stolova. Neka je broj proizvedenih stolica označen sa x_1 , odnosno broj proizvedenih stolova označen veličinom x_2 i neka je funkcija cilja, npr. $\max 45x_1 + 80x_2$ (svaka stolica donosi zaradu u iznosu od 45 eur dok svaki sto donosi zaradu od 80 eur). Interesuje nas da li bi kupcima mogli da omogućimo neki popust i u kom iznosu. Kako će se zarada menjati, ako bi se cene proizvoda uvećale/umanjile za neku vrednost λ .

Razmatraćemo nekoliko slučajeva:

1. $\max (45 + \lambda)x_1 + (80 + \lambda)x_2$
2. $\max (45 + \lambda)x_1 + (80 - \lambda)x_2$ (na času)
3. $\max (45 + \lambda)x_1 + (80 + 2\lambda)x_2$ (na času)

Pri ograničenjima

$$\begin{aligned} 5x_1 + 20x_2 &\leq 400 \\ 10x_1 + 15x_2 &\leq 450 \\ x_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Originalni problem, tj. problem za $\lambda = 0$ ima optimalno rešenje $x_1 = 24, x_2 = 14$ i iznosi $z_0 = 2,200$ eur.

Sada nas interesuje vrednost profit kompanije u zavisnosti od toga da li se λ povećava ili smanjuje.

Problem rešavamo Simpleks metodom.

Neka je $\lambda > 80$. Formiramo LP tablicu:

funkcija cilja	originalne promenljive		veštačke promenljive	
b	x_1	x_2	s_1	s_2
0	$-45 - \lambda$	$-80 - \lambda$	0	0
400	5	20	1	0
450	10	15	0	1

U koloni koja odgovara funkciji cilja nemamo negativnih vrednosti, stoga je traženo rešenje $x_1 = 0, x_2 = 0, z = 0$. Uzmimo sada da je $\lambda \leq 80$. Kolona koja odgovara promenljivoj x_2 ima negativno c , tj. kolona uz promenljivu x_2 ulazi u bazu, s_1 izlazi iz baze ($\min\{\frac{400}{20}, \frac{450}{15}\} = \min\{20, 30\}$).

funkcija cilja	originalne promenljive		veštačke promenljive	
b	x_1	x_2	s_1	s_2
$1600 + 20\lambda$	$-25 - \frac{3}{4}\lambda$	0	$4 + \frac{\lambda}{20}$	0
20	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{20}$	0
150	$\frac{25}{4}$	0	$-\frac{15}{20}$	1

Ako je $\lambda > -\frac{100}{3}$ sledi da je $c_1 < 0$, promenljiva x_1 ulazi u bazu, dok s_2 izlazi iz baze ($\min\{\frac{20}{\frac{1}{4}}, \frac{150}{\frac{15}{20}}\} = 24$)

funkcija cilja	originalne promenljive		veštačke promenljive	
b	x_1	x_2	s_1	s_2
$2200 + 38\lambda$	0	0	$1 - \frac{\lambda}{25}$	$4 + \frac{3}{25}\lambda$
14	0	1	$\frac{2}{25}$	$-\frac{1}{25}$
24	1	0	$-\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$

Ako je $\lambda \leq 25$ dobija se da je $x_1 = 14, x_2 = 24, z = 2200 + 38\lambda$. Odnosno $z_1 = 3,150$ za $\lambda = 25$.

Neka je $\lambda < -\frac{100}{3}$. Razlikujemo slučajeve:

- a) $\lambda \leq -80 \rightarrow$ rešenje problema je $x_1 = 0, x_2 = 0$.
- b) $-80 < \lambda < -45 \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 20, z = 1600 + 20\lambda$
- c) $-45 \leq \lambda \leq -\frac{100}{3} \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 20$

PRIMER 45

Rešiti sledeći problem

pri ograničenjima

$$\min x_1 + x_2 - \lambda x_3 + 2\lambda x_4$$

$$x_1 + x_3 + 2x_4 = 2$$

$$2x_1 + x_2 + 3x_4 = 5$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4.$$

Za sve vrednosti parametra λ .

Rešenje:

funkcija cilja	originalne promenljive			
b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	1	$-\lambda$	2λ
2	1	0	1	2
5	2	1	0	3

Neka je $\lambda \geq 0$, promenljive x_2 i x_3 čine bazu. Funkciji cilja dodajemo prvo ograničenje pomnoženo sa λ i oduzimamo drugo ograničenje

funkcija cilja	originalne promenljive			
b	x_1	x_2	x_3	x_4
$-5 + 2\lambda$	$-1 + \lambda$	0	0	$4\lambda - 3$
2	1	0	1	2
5	2	1	0	3

(slučaj 1) $0 \leq \lambda < \frac{3}{4}$

Promenljiva x_4 ulazi u bazu, $\min\left\{\frac{2}{2}, \frac{5}{3}\right\} = 1$, x_3 izlazi iz baze.

funkcija cilja	originalne promenljive			
b	x_1	x_2	x_3	x_4
$-2 - 2\lambda$	$\frac{1}{2} - \lambda$	0	$-2\lambda + \frac{3}{2}$	0
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0

(slučaj 1.1) $0 \leq \lambda < \frac{1}{2}$ dobija se rešenje $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 0$ i $x_4 = 1$, funkcija cilja ima vrednost $-2 - 2\lambda$

(slučaj 1.2) $\frac{1}{2} \leq \lambda < \frac{3}{4}$ dobija se da x_1 ulazi u bazu, x_4 izlazi iz baze.

funkcija cilja	originalne promenljive			
b	x_1	x_2	x_3	x_4
-3	0	0	$-\lambda + 1$	0
2	1	0	1	2
1	0	1	-2	-1

Rešenje polaznog problema $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, gde je vrednost fje cilja -3.

(slučaj 2) $\frac{3}{4} \leq \lambda \leq 1$ sledi da x_1 ulazi u bazu.

funkcija cilja	originalne promenljive			
b	x_1	x_2	x_3	x_4
-3	0	0	$1 - \lambda$	$2\lambda - 1$
2	1	0	1	2
1	0	1	-2	-1

Rešenje je $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Funkcija cilja ima vrednost -3.

(slučaj 3) $\lambda \geq 1$, tada je rešenje problema $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 2$, $x_4 = 0$. Funkcija cilja uzima vrednost $-5 + 2\lambda$.

Neka je $\lambda < 0$, tada promenljiva x_4 ulazi u bazu, x_3 izlazi iz baze:

funkcija cilja	originalne promenljive			
b	x_1	x_2	x_3	x_4
$-2 - 2\lambda$	$1 - \lambda$	1	-2λ	0
1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
2	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{3}{2}$	0

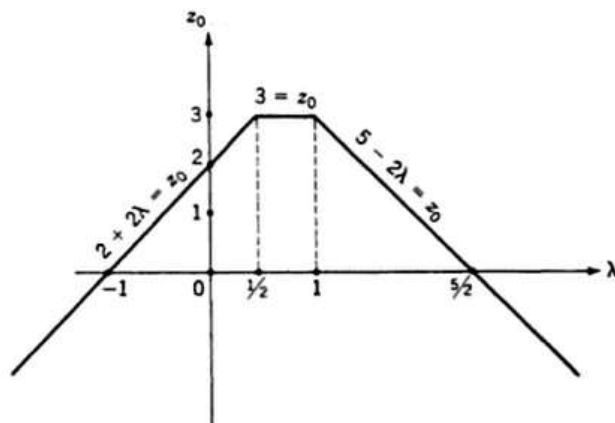
Rešenje problema je sada $x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 1$. Funkcija cilja ima vrednost -2λ .

Konačno, možemo da sumiramo sve rezultate:

$$1 \leq \lambda \leq +\infty \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 5, x_3 = 2, x_4 = 0, z_0 = 5 - 2\lambda$$

$$\frac{1}{2} \leq \lambda \leq 1 \rightarrow x_1 = 2, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0, z_0 = 3$$

$$-\infty \leq \lambda \leq \frac{1}{2} \rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 1, z_0 = 2 + 2\lambda$$



PRIMER 46

Rešiti sledeći problem

pri ograničenjima

$$\max x_1 + \lambda x_2$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 3$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 3$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2.$$

Za sve vrednosti parametra λ .

PRIMER 47

Rešiti sledeći problem

$$\min \lambda x - y$$

pri ograničenjima

$$3x - y \geq 5$$

$$2x + y \leq 3$$

$$-\infty < \delta \leq \lambda \leq \theta < +\infty$$

Rešenje.

Primerimo da promenljive x i y nisu nenegativne. Uvodimo smenu $x = x_1 - x_2$, $x_1, x_2 \geq 0$ i $y = y_1 - y_2$, $y_1, y_2 \geq 0$. Takođe uvodimo izravnavajuće promenljive u_1 i u_2 . Početni problem postaje

$$\begin{aligned} \min \lambda(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2) + wv \\ 3(x_1 - x_2) - (y_1 - y_2) - u_1 + v = 5 \\ 2(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) + u_2 = 3 \end{aligned}$$

Promenljiva v dodata je obzirom da nismo imali jediničnu podbazu. Formiramo LP tablicu.

funkcija cilja	originalne promenljive				veštačke promenljive		
b	x_1	x_2	y_1	y_2	u_1	u_2	v
0	λ	$-\lambda$	-1	1	0	0	w
5	3	-3	-1	1	-1	0	1
3	2	-1	1	-1	0	1	0

funkcija cilja	originalne promenljive				veštačke promenljive		
b	x_1	x_2	y_1	y_2	u_1	u_2	v
$-5w$	$\lambda - 3w$	$-\lambda + 3w$	$-1 + w$	$1 - w$	w	0	0
5	3	-3	-1	1	-1	0	1
3	2	-2	1	-1	0	1	0

Neka je $\lambda - 3w < 0$. Tražimo pivot u koloni koja odgovara promenljivoj x_1

funkcija cilja	originalne promenljive				veštačke promenljive		
b	x_1	x_2	y_1	y_2	u_1	u_2	v
$-\frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2}w$	0	0	$-\frac{1}{2}\lambda + \frac{5}{2}w - 1$	$\frac{1}{2}\lambda - \frac{5}{2}w + 1$	w	$-\frac{1}{2}\lambda + \frac{3}{2}w$	0
1/2	0	0	-5/2	5/2	-1	-3/2	1
3/2	1	-1	1/2	-1/2	0	1/2	0

funkcija cilja	originalne promenljive				veštačke promenljive		
b	x_1	x_2	y_1	y_2	u_1	u_2	v
$-\frac{1}{5} - \frac{8}{5}\lambda$	0	0	0	0	$\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\lambda$	$\frac{3}{5} + \frac{\lambda}{5}$	$-\frac{2}{5} - \frac{\lambda}{2} + \frac{5}{2}w$
1/5	0	0	-1	1	-2/5	-3/5	2/5
8/5	1	-1	0	0	-1/5	1/5	1/5

Kako se vrednost w nalazi samo uz kolonu koja odgovara promenljivoj v koja je z to nebazna, eliminisaćemo tu kolonu. Za $\lambda \geq -2$ dobijamo prvo rešenje: $x_1 = \frac{8}{5}, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = \frac{1}{5}, u_1 = 0, u_2 = 0$. Funkcija ima vrednost $z = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}\lambda$. Tražimo rešenje za $\lambda < -2$.

Za $-3 < \lambda < -2$ nema dopustivog rešenja obzirom da su u koloni koja odgovara u_1 sve vrednosti negativne. Za, $\lambda \leq -3$ sledeći vektor koji ulazi u bazu je u_2 dok x_1 izlazi iz baze:

funkcija cilja	originalne promenljive				veštačke promenljive	
b	x_1	x_2	y_1	y_2	u_1	u_2
-5	$-3 + \lambda$	$3 - \lambda$	0	0	1	0
5	3	-3	-1	1	-1	0
8	5	-5	0	0	-1	1

Za $\lambda = -3$ funkcija ima rešenje -5 koje dostiže za $x_1 = 0, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = 5, u_1 = 0, u_2 = 8$.

Za $\lambda < -3$

funkcija cilja	originalne promenljive				veštačke promenljive	
b	x_1	x_2	y_1	y_2	u_1	u_2
$-\frac{1}{5} - \frac{8}{5}\lambda$	0	0	0	0	$\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\lambda$	$\frac{3}{5} + \frac{1}{5}\lambda$
1/5	0	0	-1	1	-2/5	-3/5
8/5	1	-1	0	0	-1/5	1/5

Rešenje problem je sada $x_1 = \frac{8}{5}, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = \frac{1}{5}, u_1 = 0, u_2 = 0$. Funkcija ima vrednost $z = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}\lambda$

PRIMER 48

Rešiti sledeći problem

$$\max 45x_1 + 80x_2$$

pri ograničenjima

$$\begin{aligned} 5x_1 + 20x_2 &\leq 400 + \theta \\ 10x_1 + 15x_2 &\leq 450 + 5\theta \\ x_i &\geq 0, i = 1, 2 \end{aligned}$$

za sve vrednosti parametra θ .

Rešenje.

Na primer, vlasnika fabrike koja se bavi proizvodnjom stolica i stolova zanima kako se menja raspored proizvodnje i kako se menja zarada ako se broj radnih sati poveća ili smanji

Formiramo LP tablicu.

funkcija cilja	originalne promenljive		veštačke promenljive	
b	x_1	x_2	u_1	u_2
0	-45	-80	0	0
$400 + \theta$	5	20	1	0
$450 + 5\theta$	10	15	0	1

Neka je $\theta \geq -90$. Promenljiva x_2 ulazi u bazu u_2 izlazi iz baze, $\min \left\{ \frac{400+\theta}{20}, \frac{450+5\theta}{15} \right\} = \frac{450+5\theta}{15}$ za $-90 \leq \theta \leq -\frac{600}{17}$.

funkcija cilja	originalne promenljive		veštačke promenljive	
b	x_1	x_2	u_1	u_2
$2400 + \frac{80}{3}\theta$	25/3	0	0	16/3
$-200 - \frac{17}{3}\theta$	-25/3	0	1	4/3
$30 + \frac{1}{3}\theta$	2/3	1	0	1/15

Rešenje je $-2400 + \frac{80}{3}\theta$ i dostiže se za $x_1 = 0, x_2 = 30 + \frac{\theta}{3}, u_1 = -200 - \frac{17}{3}\theta, u_2 = 0$.

Neka je sada $\theta > -\frac{600}{17}$. Promenljiva x_2 izlazi iz baze, ali u bazu ulazi u_1 :

funkcija cilja	originalne promenljive		veštačke promenljive	
b	x_1	x_2	u_1	u_2
$1600 + 4\theta$	-25	0	4	0
$20 + \frac{1}{20}\theta$	$\frac{1}{4}$	1	1/20	0
$150 + \frac{17}{4}\theta$	25/4	0	-3/4	1

Za $\theta \leq \frac{350}{3}$ sledi da x_1 ulazi u bazu i da u_2 izlazi iz baze.

funkcija cilja	originalne promenljive		veštačke promenljive	
b	x_1	x_2	u_1	u_2
$2200 + \frac{14}{25}\theta$	0	0	1	4
$14 - \frac{3}{25}\theta$	0	1	1/50	-1/25
$24 + \frac{17}{25}\theta$	1	0	-3/25	4/25

Dobijamo da je rešenje problema $2200 + \frac{14}{25}\theta$ i da se dostiže za $x_1 = 24 + \frac{17}{25}\theta, x_2 = 14 - \frac{3}{25}\theta, u_1 = 0, u_2 = 0$.

Odnosno, za $\theta > \frac{350}{3}$ dobijamo da x_1 ulazi u bazu ali da u_1 izlazi iz nje.

funkcija cilja	originalne promenljive		veštačke promenljive	
b	x_1	x_2	u_1	u_2
$4100 + 9\theta$	0	100	9	0
$100 + \frac{1}{5}\theta$	1	4	1/5	0
$475 + 3\theta$	0	0	-2	1

Rešenje problema je $4100 + 9\theta$ i dostiže se za $x_1 = 100 + \frac{1}{5}\theta, x_2 = 0, u_1 = 0, u_2 = 475 + 3\theta$.

PRIMER 49

Rešiti sledeći problem

pri ograničenjima

$$\min x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4$$

$$x_1 - 2x_2 - x_4 = 2 - \theta$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = -1 + \theta$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2$$

za sve vrednosti parametra θ .

Rešenje.

Potrebno je proveriti da li je $2 - \theta \geq 0, -1 + \theta \geq 0$. Kako ovo važi za $1 \leq \theta \leq 2$ prvo ćemo rešenje tražiti na tom segmentu. Formiramo LP tablicu

funkcija cilja	originalne promenljive			
b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	1	2	1
$2 - \theta$	1	-2	0	-1
$-1 + \theta$	0	1	-1	1

Treba korigovati funkciju cilja obzirom da nad baznim promenljivim imamo nenula vrednosti. Bazu čine vektori x_1 i x_2 .

funkcija cilja	originalne promenljive			
b	x_1	x_2	x_3	x_4
$\theta - 1$	0	0	5	1
$2 - \theta$	1	0	-2	-1
$-1 + \theta$	0	1	-1	1

Za $\theta \in [1,2]$ optimalno rešenje ima vrednost $\theta - 1$ koje se dostiže za $x_1 = 2 - \theta, x_2 = -1 + \theta, x_3 = 0, x_4 = 0$.

Neka je, sada $\theta > 2$ koristimo dualnu Simpleks metodu

funkcija cilja	originalne promenljive			
b	x_1	x_2	x_3	x_4
-1	0	0	5	1
$2 - \theta$	1	0	-2	-1
$-1 + \theta$	0	1	-1	1

funkcija cilja	originalne promenljive			
b	x_1	x_2	x_3	x_4
$1 - \theta$	1	0	3	0
$-2 + \theta$	-1	0	2	1
1	1	1	-3	0

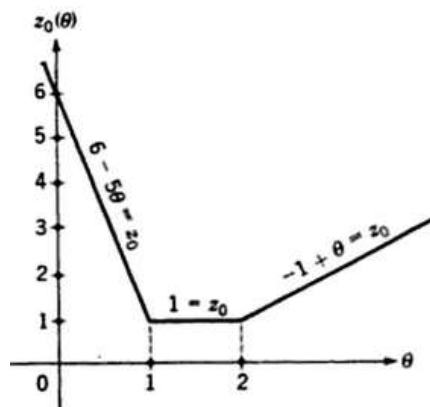
Rešenje je $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = -2 + \theta, z = 1 - \theta$

I konačno, neka je $\theta < 1$

funkcija cilja	originalne promenljive			
b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	1	1	2	1
$2 - \theta$	1	-2	0	-1
$-1 + \theta$	0	1	-1	1

funkcija cilja	originalne promenljive			
b	x_1	x_2	x_3	x_4
$-2 + 2\theta$	1	3	0	3
$-6 + 5\theta$	0	5	0	6
$4 - 3\theta$	1	-2	0	-3
$1 - \theta$	0	-1	1	-1

Odgovarajuće rešenje je $x_1 = 4 - 3\theta, x_2 = 0, x_3 = 1 - \theta, x_4 = 0$.



ZADACI ZA VEZBU

ZADATAK 1

Rešiti sledeći problem minimizacije

$$\min (3 - \lambda)x_1 - (2 + \lambda)x_2$$

pri ograničenjima

$$2x_1 + 5x_2 \leq 10$$

$$6x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1 - x_2 \leq 1$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2$$

ZADATAK 2

Rešiti sledeći problem minimizacije

$$\min 2\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 - 3x_3 + \lambda x_4 + 2x_5 - 3\lambda x_6$$

pri ograničenjima

$$x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7$$

$$-2x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$$

$$-4x_2 + 3x_3 + 8x_5 + x_6 = 10$$

$$x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, 6$$

Rešenje tražiti na segmentima $-\infty \leq \lambda \leq -\frac{1}{10}$, $-\frac{1}{10} \leq \lambda \leq -\frac{1}{27}$, $-\frac{1}{27} \leq \lambda \leq 2$, $2 \leq \lambda \leq \infty$.

ZADATAK 3

Rešiti sledeći problem minimizacije

$$\min 2x_4 + 8x_5$$

pri ograničenjima

$$x_1 + 3x_4 - x_5 = 3 - \theta$$

$$x_2 - 4x_4 + 2x_5 = 1 + 2\theta$$

$$x_3 - x_4 + 3x_5 = -1 + \theta$$

$$x_i \geq 0 \forall i$$

Optimalno rešenje tražiti na segmentima $0 \leq \theta \leq 1$, $1 \leq \theta \leq 3$, $3 \leq \theta \leq 4$.