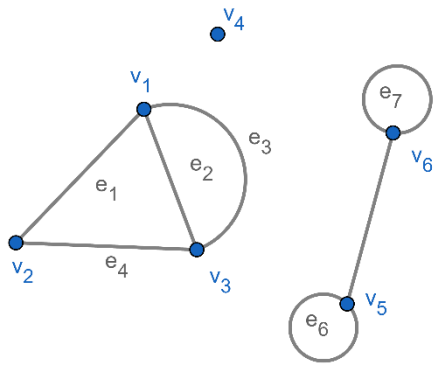
# Grafovi

1. Posmatrajmo graf prikazan na slici sa desne strane.

a) Odrediti skup čvorova $V$ i skup grana $E$ posmatranog grafa. Za svaku granu posebno odrediti njene krajeve.

b) Odrediti sledeće skupove:
   - skup grana incidentnih sa $v_1$ (skup $E_1$),
   - skup čvorova susednih sa $v_1$ (skup $N_{v_1}$),
   - skup grana susednih sa $e_1$ ($N_{e_1}$),
   - skup svih petlji (skup $L$),
   - paralelnih grana (skup $P$),
   - skup čvorova susednih sami sebi (skup $A$)
   - skup izolovanih čovorova (skup $I$).




Rešenje:

a) $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$
$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

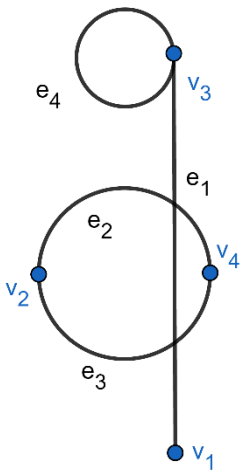
| Grana | Krajevi grane |
|---|---|
| $e_1$ | $\{v_1, v_2\}$ |
| $e_2$ | $\{v_1, v_3\}$ |
| $e_3$ | $\{v_1, v_3\}$ |
| $e_4$ | $\{v_2, v_3\}$ |
| $e_5$ | $\{v_5, v_6\}$ |
| $e_6$ | $\{v_5\}$ |
| $e_7$ | $\{v_6\}$ |

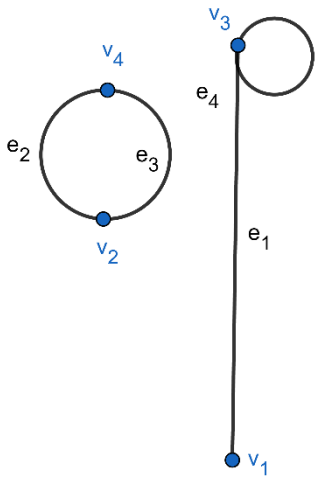
b) $E_1 = \{e_1, e_2, e_3\}$
$N_{v_1} = \{v_2, v_3\}$
$N_{e_1} = \{e_2, e_3, e_4\}$
$L = \{e_6, e_7\}$
$P = \{e_2, e_3\}$
$A = \{v_5, v_6\}$
$I = \{v_4\}$

2. Nacrtajte graf koji ima sledeću strukturu
$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$

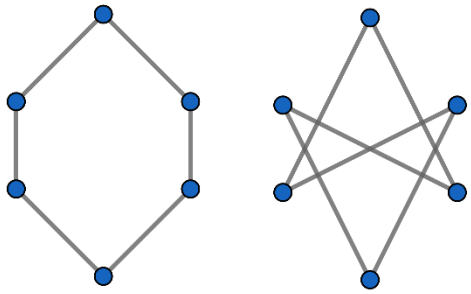
| Grana | Krajevi grane |
|---|---|
| $e_1$ | $\{v_1, v_3\}$ |
| $e_2$ | $\{v_2, v_4\}$ |
| $e_3$ | $\{v_2, v_4\}$ |
| $e_4$ | $\{v_3\}$ |

Rešenje:
Zadati graf se može prkazati na više načina, predlažemo dva

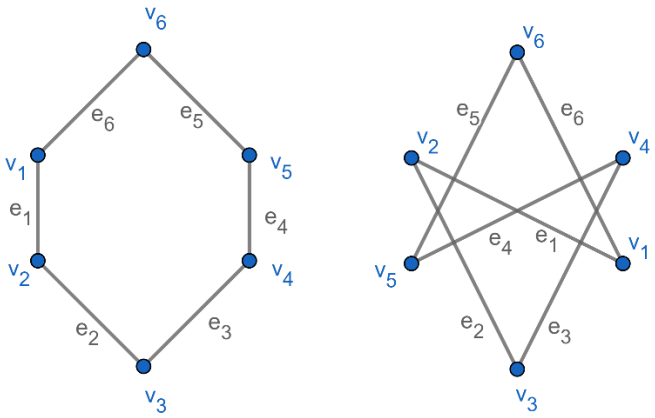


3. Obeležite grane i čvorove grafova tako da oni predstavljaju isti graf

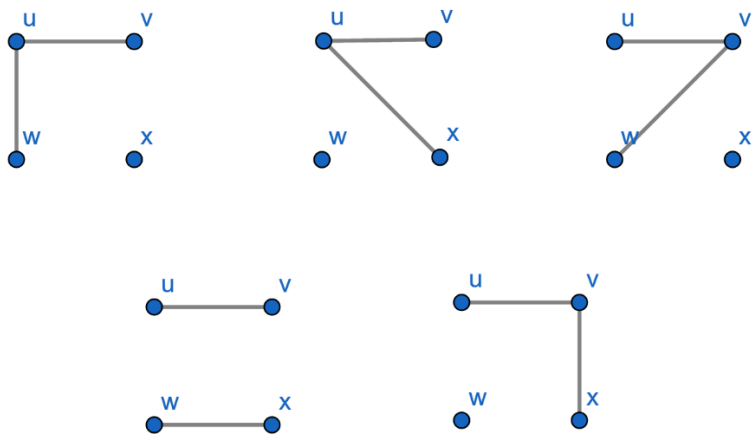


Rešenje:

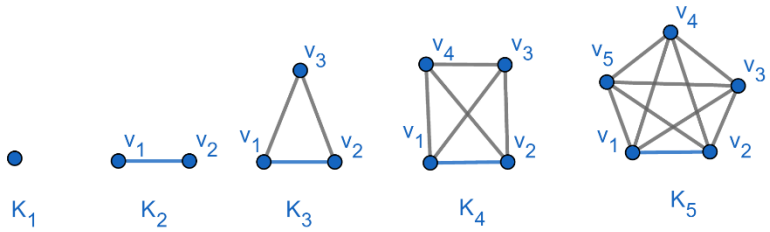



Grafovi imaju široku primenu danas. Pomoću grafova se mogu predstaviti komunikacioni sistemi, mreža puteva i slično. Grafovi se mogu klasifikovati po svojoj strukturi.

- Graf je **prost** ukoliko nema petlji niti paralelnih grana. Na primer, posmatrajmo graf sa skupom čvorova $V = \{u, v, w, x\}$ i skupom grana $E = \{e_1, e_2\}$ definisanih tako da je $e_1 = \{u, v\}$.

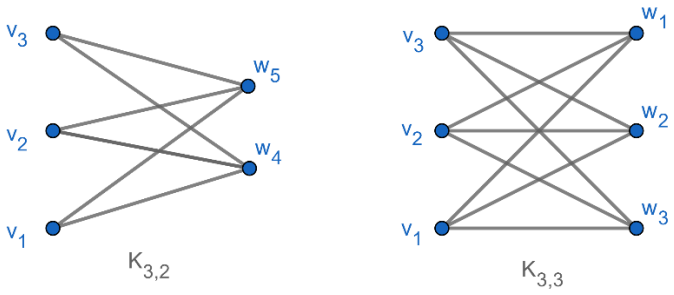



- Prost graf se naziva **kompletnim** ukoliko za svaki par čvorova postoji tačno jedna grana koja ih povezuje. Za kompletne grafove sa $n$ čvorova koristimo oznaku $K_n$.

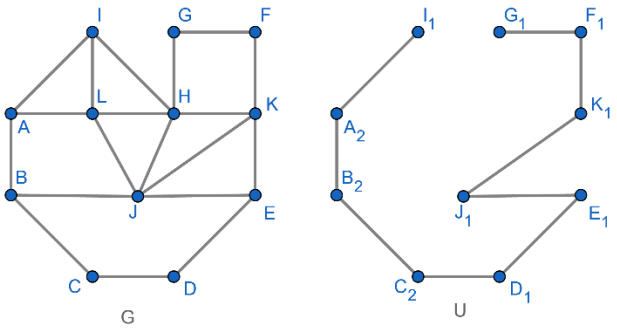


- Graf se naziva **kompletnim bipartitnim grafom** sa $m$ i $n$ čvorova, u oznaci $K_{m,n}$ ako se svi njegovi čvorovi mogu grupisati u dva skupa čvorova, označimo ih sa $v_1, v_2, \dots, v_m$ i $w_1, w_2, \dots, w_n$, tako da važi sledeće: za svako $i, k = 1, \dots, m$ i $j, l = 1, \dots, n$
  - postoji grana koja povezuje čvorove $v_i$ i $w_j$
  - ne postoji grana između čvorova $v_i$ i $v_k$
  - ne postoji grana između čvorova $w_j$ i $w_l$

  Na slici niže su prikazana dva bipartitna grafa, $K_{3,2}$ i $K_{3,3}$

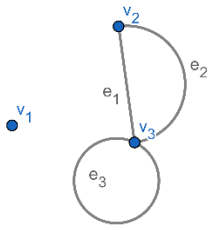



- Graf $U = (V_U, E_U)$ se naziva **podgrafom** grafa $G = (V_G, E_G)$ ukoliko je $V_U \subseteq V_G$ i ako su čvorovi $V_U$ povezani tako da važi $E_U \subseteq E_G$.




- **Stepen čvora**, u oznaci $\deg v$, predstavlja broj grana koje iz tog čvora „izlaze“. Suma stepena svih čvorova predstavlja dvostruku vrednost broja grana tog grafa.

4. Odrediti stepen svakog čvora grafa koji je prikazan na slici




Rešenje
$\deg(v_1) = 0$ jer nije susedan ni sa jednim čvorom
$\deg(v_2) = 2$ jer su dve grane incidentne sa njim
$\deg(v_3) = 4$ jer su grane $e_1, e_2$ incidentne sa njim, kao i grana $e_3$ koja se računa dvostruko

$$\deg_G = \deg(v_1) + \deg(v_2) + \deg(v_3) = 0 + 2 + 4 = 6$$

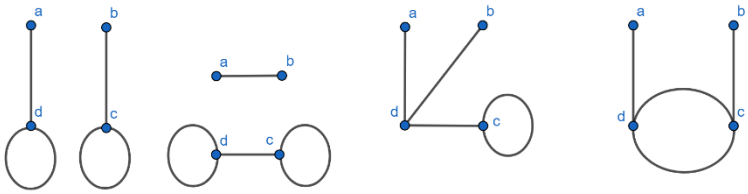
**Teorema**
Stepen grafa jednak je dvostrukom broju njegovih grana.

**Posledica**
Stepen grafa je paran broj

**Posledica**
U svakom grafu može biti samo paran broj čvorova neparnog stepena.

5. Nacrtati graf koji ima sledeću strukturu (ili pokazati da takav graf ne postoji)
    a. Graf sa 4 čvora stepena 1,1,2 i 3.
    b. Graf sa 4 čvora stepena 1, 1, 3 i 3
    c. Prost graf sa 4 čvora stepena 1,1, 3 i 3

Rešenje
a. Na osnovu posledice se može zaključiti da ovakav graf ne postoji (1+1+2+3=7, neparna vrednost)
b. Neki primeri grafa su prikazani niže



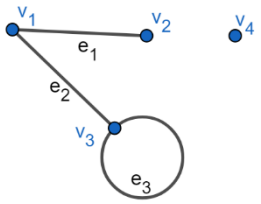

c. Ne postoji prost graf sa zadatom strukturom (na osnovu pretpostavki da je graf prost, možemo uzeti da su $a$ i $b$ čvorovi stepena 1, a $c$ i $d$ čvorovi stepena 3. Sa obzirom da je čvor prost, sledi da je nema paralelnih grana niti petlji, tako da čvor $c$ mora biti susedan sa 3 čvora, a to su $a$, $b$ i $d$. Takođe, čvor $d$ mora biti susedan sa 3 čvora, a to su $a$, $b$ i $c$, što je u kontradikciji sa pretpostvkom da su stepeni čvorova $a$ i b jednaki 1.

6. Da li se u grupi svako od devetoro ljudi može povezati sa tačno petoro drugih?

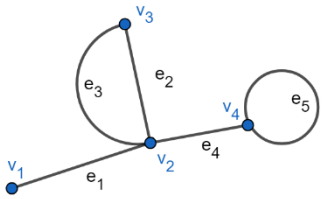
Rešenje
Ne. Predstavimo ljude kao čvorove grafa koji će međusobno biti povezani jedino ako su ljudi međusobno povezani. U tom slučaju se dobija da je stepen grafa 9*5=45 što ne može jer je neparan broj.

## Zadaci za vežbu

1. Grafovi su prikazani na slici. Definisati skupove čvorova, grana, za svaku granu odrediti krajnje čvorove.
   a.




   b.




2. Nacrtati graf $G$ definisan skupom čvorova $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ i skupom grana $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ ako su krajevi svake grane prikazani u tablici
   a.

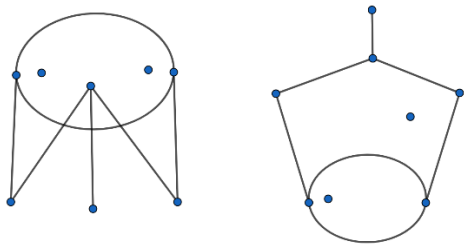
| Grana | Krajevi grane |
|---|---|
| $e_1$ | $\{v_1, v_2\}$ |
| $e_2$ | $\{v_1, v_2\}$ |
| $e_3$ | $\{v_2, v_3\}$ |
| $e_4$ | $\{v_2\}$ |

   b.

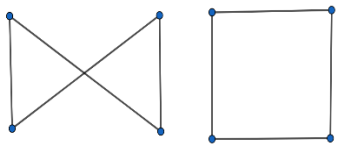
| Grana | Krajevi grane |
|---|---|
| $e_1$ | $\{v_1\}$ |
| $e_2$ | $\{v_2, v_3\}$ |
| $e_3$ | $\{v_2, v_3\}$ |
| $e_4$ | $\{v_1, v_5\}$ |

3. Da li su na slikama prikazani isti grafovi? Obrazložiti odgovor.

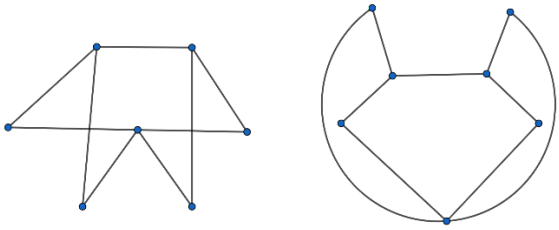
a)



b)



c)

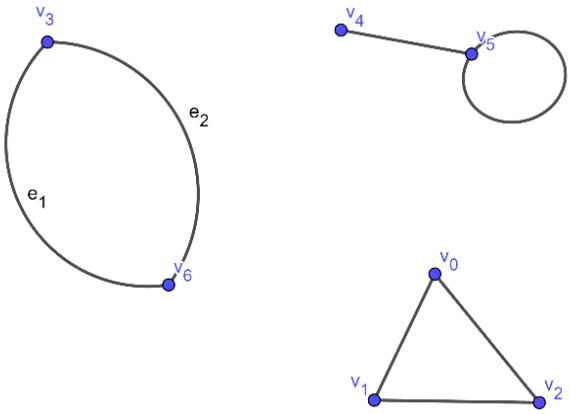


4. Za grafove sa slike odrediti sledeće skupove:
   - skup grana incidentnih sa $v_1$ (skup $E_1$),
   - skup čvorova susednih sa $v_3$ (skup $N_{v_3}$),
   - skup grana susednih sa $e_1$ ($N_{e_1}$),
   - skup svih petlji (skup $L$),
   - paralelnih grana (skup $P$),
   - odrediti stepen čvora $v_3$ kao i stepen grafa,
   - skup izolovanih čovorova (skup $I$).

5. Da li se korišćenjem dve kofe, A i B, kapaciteta 3 i 5 litara (tim redom) može izmeriti tačno jedan litar ako su dozvoljene sledeće radnje: obe kofe se mogu napuniti do vrha, obe kofe se mogu isprazniti u celosti, dozvoljeno je prespanje tečnosti iz jedne kofe u drugu.

6. Nacrtati sledeće grafove, ukoliko takvi grafovi postoje
   - Graf sa pet čvorova stepena 1,2 ,3,3 i 5
   - Graf sa četiri čvora stepena 1,2,3 i 3
   - Graf sa četiri čvora stepena 1, 1, 1 i 4
   - Prost graf sa četiri čvora stepena 1,2,3 i 4
   - Prost graf sa pet čvorova stepena 2,3,3,3 i 5.

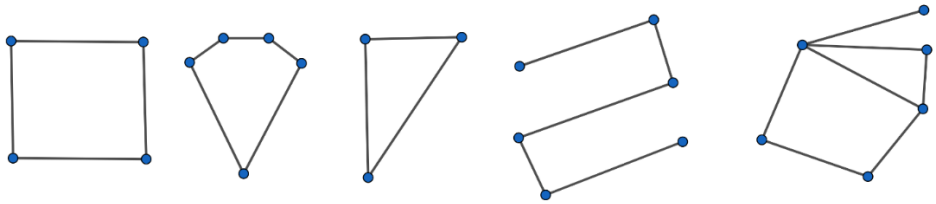
7. Odrediti sve neprazne podgrafe grafova sa slike



8. Da li je moguće da u grupi od 15oro ljudi svako od njih ima tačno troje prijatelja.
9. U grupi od četvoro ljudi da li je moguće da svako od njih bude prijatelj sa tačno troje iz grupe.
10. Koliko grana ima graf ako su stepeni čvorova sledeći 0,2,2,3 i 9.
11. Koliko grana ima graf ako su stepeni čvorova sledeći 1,1,4,4 i 6.
12. Nacrtati sledeće kompletne bipartitne grafove $K_{4,2}$, $K_{1,3}$ i $K_{3,4}$. Koliko čvorova imaju nacrtani grafovi. Kog stepena su posmatrani grafovi.

**Bipartitni graf** je prost graf čiji se skup čvorova može grupisati tako da svaki čvor iz jedne grupe može biti povezan sa čvorovima iz druge grupe ali ne sme biti povezan sa čvorovima iz svoje grupe.

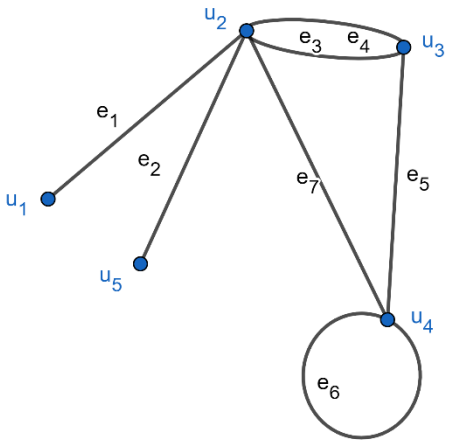
13. Među prikazanim grafovima odredite bipartitne



Graf G' se naziva **komplementom prostog grafa G** ukoliko važi sledeće: Skup čvorova grafa G' je identičan skupu čvorova grafa G, dok su dva čvora grafa G' povezana granom akko nisu povezana granom u grafu G.
Na primer, njegov komplement je nepovezan graf sa istim brojem čvorova i praznim skupom grana.

## Putanje i cikli u grafovima

Posmatrajmo graf prikazan na slici




Alternirajući niz susednih čvorova i grana od čvora $u_1$ do čvora $u_4$ se naziva **šetnjom po grafu** i može se opisati na sledeći način:

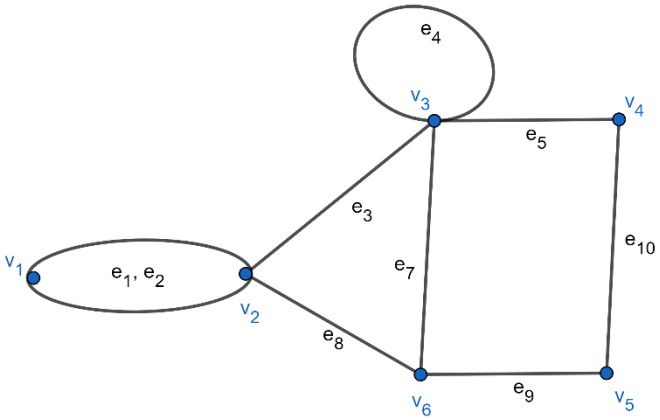
$$u_1e_1u_2e_3u_3e_4u_2e_3u_3e_5u_4e_7u_2e_3u_3e_5u_4.$$

**Šetnja je trivijalna** ukoliko se sastoji samo iz jednog čvora.
**Šetnja je zatvorena** ako su početni i krajnji čvor isti.
**Put** u grafu je šetnja u kojoj se ni jedna grana ne ponavlja.
Put je **prost** ukoliko se u njemu ni jedan čvor ne ponavlja.
**Cikl** je zatvoren put.
**Prost cikl** je zatvoreni prost put.
**Trivijalni cikl** je šetnja koja se sastoji samo iz jednog čvora i ni jedne grane.

Napomena:

- Zapis $e_1e_3e_4e_2$ podrazumeva zapis $u_1e_1u_2e_3u_3e_4u_2e_2v_5$, dok se zapis $e_1$ može protumačiti na dva načina: $u_1e_1u_2$ i $u_2e_1u_1$.
- Zapis $u_1u_2$ podrazumeva jedinstven zapis $u_1e_1u_2$ dok se zapis $u_2u_3$ može protumačiti kao $u_2e_3u_3$ i $u_2e_4v_3$.
- Zapis $u_2u_4u_4u_3$ podrazumeva jedinstvenu putanju $u_2e_7u_4e_6u_4e_5u_3$

1. Neka je graf G prikazan na slici desno. Za svaki od ponuđenih odgovora odrediti da li on predstavlja putanju, prostu putanju, kružnicu ili prostu kružnicu.



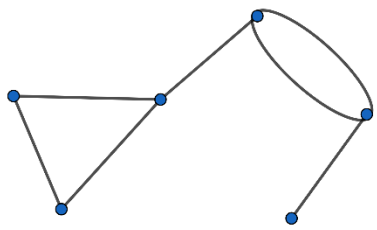

   a. $v_1\ e_1\ v_2\ e_3\ v_3\ e_4\ v_3\ e_5\ v_4$
   b. $e_1e_3e_5e_6$
   c. $v_2v_3v_4v_5v_6v_2$
   d. $v_2v_3v_4v_5v_6v_2$
   e. $v_2v_3v_4v_6v_3v_2$
   f. $v_1$

Rešenje

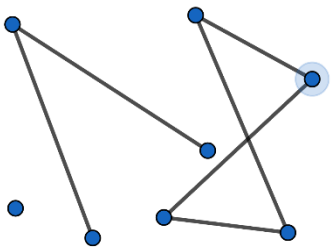
a. Opisana šetnja ima čvor koji se ponavlja ali nema granu koja se ponavlja, tako da ona predstavlja putanju od $v_1$ do $v_4$ koja nije prosta.
b. U pitanju je šetnja od $v_1$ do $v_5$. Nije u pitanju putanja je ima granu koja se ponavlja.
c. Opisana je šetnja bez ponavljajućih grana koja počinje i završava se u čvoru $v_2$. Dakle, u pitanju je cikl. Kako se čvor u središtu ponavlja, nije prosti cikl.
d. Opisana šetnja počinje i završava se u $v_2$, a da pri tom ne obilazi ni jednu granu niti čvor dva puta. Dakle, u pitanju je prost cikl.
e. Opisana šetnja predstavlja zatvorenu šetnju koja počinje i završava se u čvoru $v_2$. Nije u pitanju ni cikl niti prost cikl zato što se grana $e_3$ i čvor $v_3$ ponavljaju.
f. Prvi i poslednji čvor šetnje su isti. Takođe šetnja ne ponavlja ni jedan čvor niti granu. Dakle, u pitanju je prost cikl koji se još naziva **trivijalnim ciklom.**

Neka je G graf. Dva čvora *u* i *w* su **povezana** ako i samo ako postoji neka šetnja od čvora *u* do čvora *w*. **Graf je povezan** graf akko za svaki par čvorova posmatranog grafa postoji šetnja od jednog do drugog.
Na primer, graf pod a) je povezan dok grafovi pod b) i c) to nisu

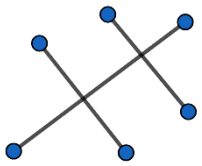
a)



b)



c)



**Definicija**

Cikl koji sadrži sve grane grafa naziva se **Ojlerovim ciklom**. Graf se naziva Ojlerovim ako nema izolovanih čvorova i ima Ojlerov cikl.

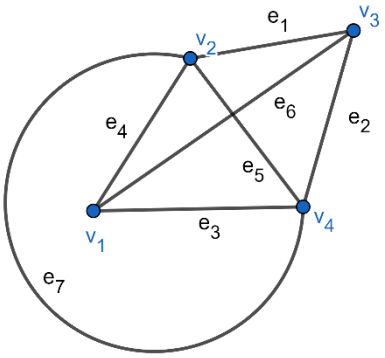
**Teorema**

Ukoliko graf ima Ojlerov cikl, tada je stepen svakog čvora tog grafa paran.

**Teorema**

Ako je graf G povezan i ako je stepen svakog njegovog čvora paran, tada takav graf ima Ojlerov cikl.

2. Da li se za graf na slici može odrediti Ojlerov cikl?




Rešenje:

Stepen čvorova $v_1$ i $v_3$ je 3, što je neparna vrednost. Stoga se na osnovu date teoreme može zaključiti da za ovakav graf Ojlerov cikl ne postoji.

Algoritam za određivanje Ojlerovog cikla:

Korak 1: Proizvoljno izabrati čvor grafa kao početni

Korak 2: Izabrati bilo koju cikl koji počinje i završava se u izabranom čvoru ne ponavljajući ni jednu granu. Označimo konstruisan cikl sa C.

Korak 3: Proverite da li C sadrži svaku granu i svaki čvor grafa G. Ako je odgovor potvrdan, C je Ojlerova putanja i algoritam je završen. Inače se primenjuju naredni koraci.

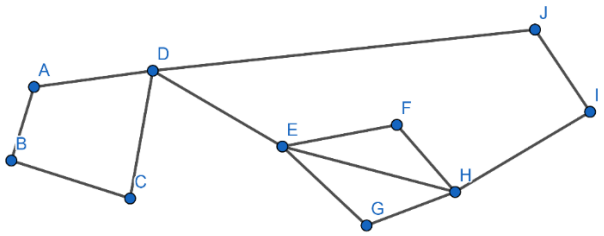
Korak 3a: Ukloniti sve grane iz grafa G koje odgovaraju ciklu C i sve čvorove koji će ostati izolovani nakon brisanja grana. Nazovimo rezultujući podgraf G1. Pri tom, može da se dogodi da graf G1 ne bude povezan i da stepen svakog njegovog čvora bude paran.

Korak 3b: Izabrati bilo koji čvor *w* koji pripada i ciklu C i grafu G1

Korak 3c: Na grafu G1 izabrati bilo koji cikl koji počinje i završava se u *w* bez ponavljanja grana. Nazovimo rezultujući cikl C1.

Korak 3d: Spojimo ciklove C i C1 u cikl C2 na sledeći način: Polazeći od *v* koristimo cikl C do *w*, a zatim duž cikla C1 idemo nazad do *w*. Dalje se od čvora *w* duž cikla C vraćamo do čvora *v*.

3. Za posmatrani graf odrediti Ojlerov cikl (ukoliko postoji).




Rešenje:

Primetićemo da je stepen svakog čvora paran i da je graf povezan. Stoga Ojlerov cikl postoji. Odredićemo ga tako što ćemo da pratimo korake opisane u prethodnom algoritmu.

Neka je cikl C definisan na sledeći način $C$: $abcda$.

Kako opisan cikl ne prolazi kroz sve čvorove grafa, formiraćemo pomoćni cikl

$$C1\colon\ deghijd$$

Spajanjem ciklova C i C1 dobija se cikl

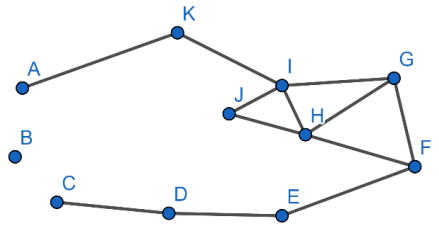
$$C2\colon\ abcdeghjida$$

Dobijeni cikl označimo kao C i proveravamo da li je on Ojlerov. Međutim, dobijen cikl nije Ojlerov jer ne prolazi kroz čvor f.

Oređujemo pomoćni cikl $C1$: $efhe$. Spajamo ciklove $C$ i $C1$ u novi cikl $C2$: $abcdefheghjida$. Izjednačimo C2 sa C. Dobijeni cikl je Ojlerov.

**Ojlerov put** je put koji sadrži sve grane tog grafa.

4. Za posmatrani graf odrediti Ojlerov put od čvora A do čvora B.




## Hamiltonov cikl

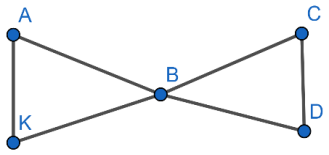
**Hamiltonovim ciklom** grafa G nazivamo prost cikl koji prolazi kroz svaki čvor grafa tačno jedanput (osim prvog i poslednjeg koji su isti) prolazeći kroz sve grane grafa.

**Hamiltonovim putem** od *u* do *v* nazivamo put koji sadrži svaki čvor grafa tačno jednom a čiji su krajevi čvorovi *u* i *v*.

Ako graf H ima netrivijalni cikl, onda graf G ima podgraf H putanju sa sledećim osobinama

1) H sadrži svaki čvor grafa G
2) H je povezan graf
3) H ima isti broj čvorova i grana
4) Svaki čvor u H ima stepen 2

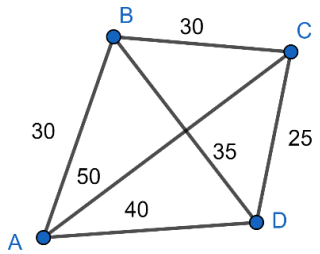
5. Da li sledeći graf ima Hamiltonov put?




Rešenje:
Ako bi posmatrani graf imao Hamiltonov put, tada bi mogao da se izdvoji podgraf H sa 5 čvorova i 5 grana takvih da svaki čvor grafa ima stepen 2. Pošto je stepen čvora b jednak 4 potrebno je da se obrišu dve grane. Ako obrišemo granu $\{a, b\}$ čvor a će imati stepen 1 a ne 2 kao što treba. Slično bi moglo da se pokaže i za ostale grane, što nas dovodi do zaključka da se za posmatrani graf ne može pronaći Hamiltonov put.

Specijalan primer Hamiltonovog puta je **problem Trgovačkog putnika** koji se može opisati na sledeći način:

Neka je na grafu niže postavljena mreža gradova i tačno rastojanje među njima kao težina grana. Ako Trgovački putnik treba da poseti svaki grad tačno jedanput i ako svoju putanju treba da započne i završi u gradu A, odrediti putanju Trgovačkog putnika tako da ukupno pređeno rastojanje bude minimalno.



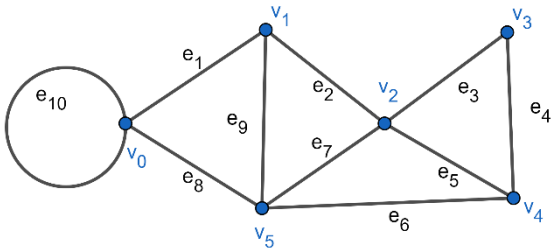

Rešenje:
Rešićemo problem Trgovačkog putnika tako što ćemo da izračunamo dužine svih putanja a zatim da izaberemo najkraću među njima:

ABCDA : 30+30+25+40=125
ABDCA : 30+35+25+50=140
ACBDA : 50+30+35+40=155
ACDBA : 140 (put ABDCA samo unazad)
ADBCA : 155 (put ACBDA samo unazad)
ADCBA : 125 (put ADCBA samo unazad)

Najkraći putevi imaju 125 kilometara: ABCDA i ADCBA

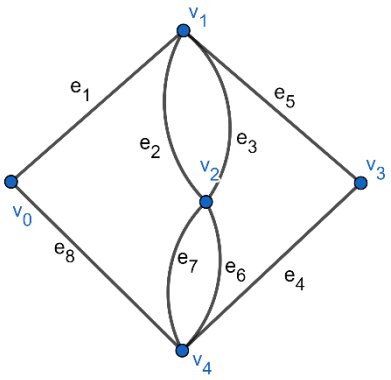
## Zadaci za vežbu

1. Za svaku šetnju odrediti da li ona predstavlja put, prost put, zatvoreni put, cikl, prost cikl ili ništa od navedenog
   a. $v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 e_4 v_4 e_f v_2 e_2 v_1 e_1 v_0$
   b. $v_2 v_3 v_4 v_5 v_2$
   c. $v_4 v_2 v_3 v_4 v_5 v_2 v_4$
   d. $v_0 v_5 v_2 v_3 v_4 v_2 v_1$
   e. $v_2 v_1 v_5 v_2 v_3 v_4 v_2$
   f. $v_5 v_4 v_2 v_1$

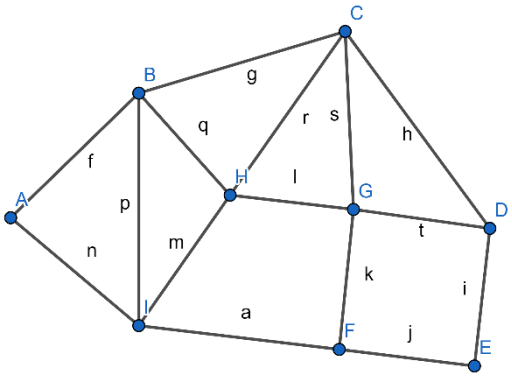



2. Da li grafovi na slici sadrze Ojlerov cikl

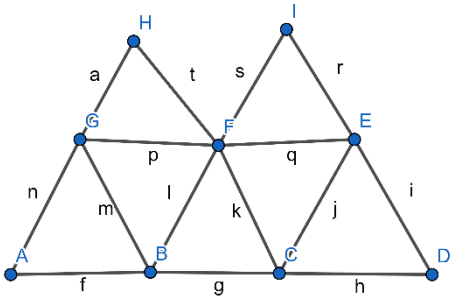
a.

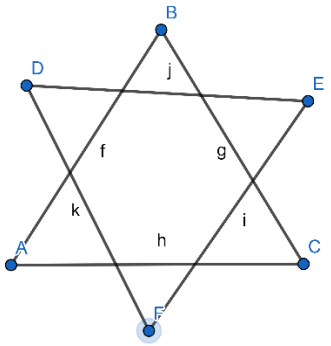



b.

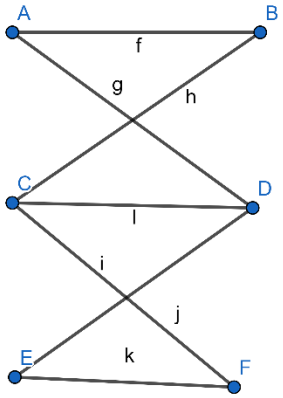



c.



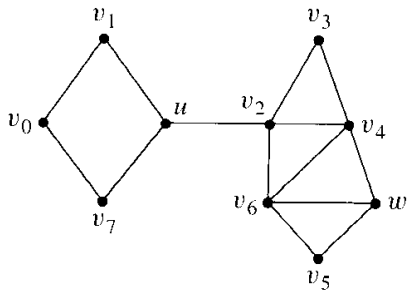


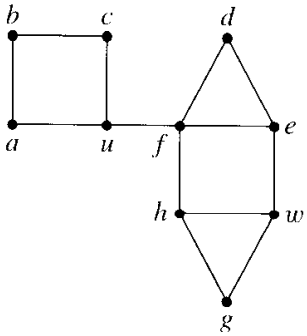

d.

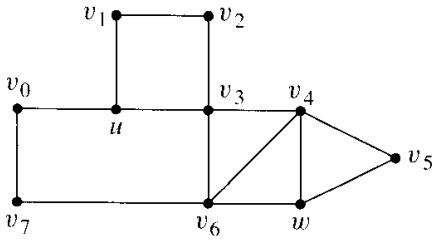



e.

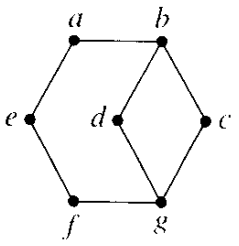
3. Da li postoji Ojlerov put od u do w



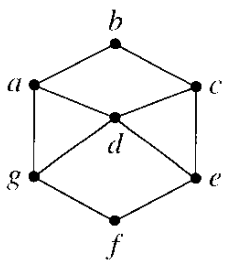



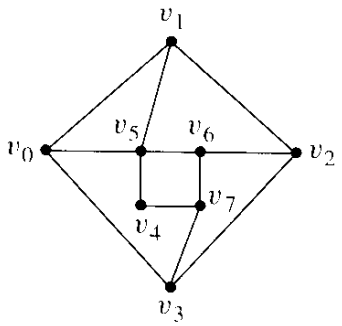



4. Naci Hamiltonove cikle

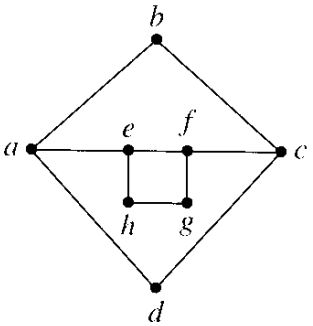



29.

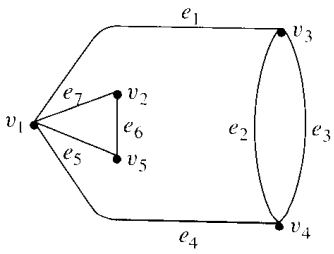


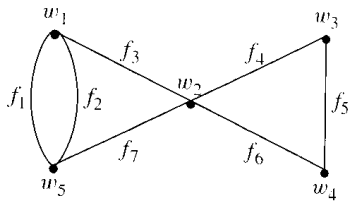

31.




Kažemo da su dva grafa $G_1 = (V_1, E_1)$ i $G_2 = (V_2, E_2)$ **izomorfna** akko postoje bijekcije $g: V_1 \to V_2$ i $h: E_1 \to E_2$ takve da važi: ako je $v$ kraj grane $e$ u grafu $G_1$, onda je I $g(v)$ kraj grane $h(e)$ u grafu $G_2$.
Grafovi na slici su izomorfni:

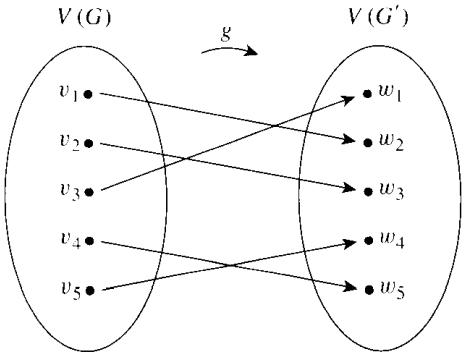


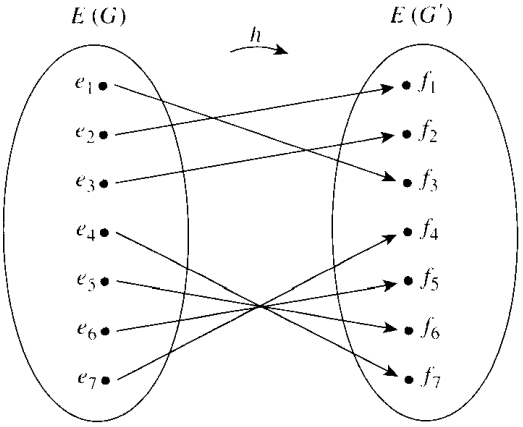

$G$




$G'$

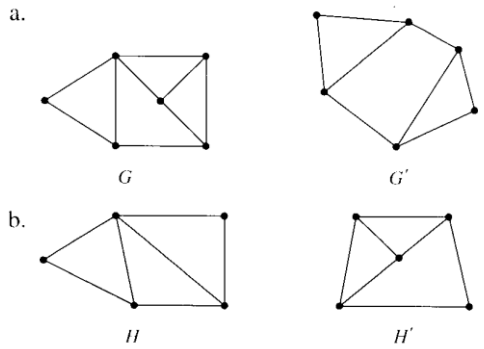
Njima odgovarajuće bijekcije su




Na slici su prikazani grafovi koji imaju dva čvora i dve grane, a koji međusobno nisu izomorfni, tj. svaki drugi graf koji ima dva čvora i dve grane je izomorfan jednom od prikazana 4 grafa

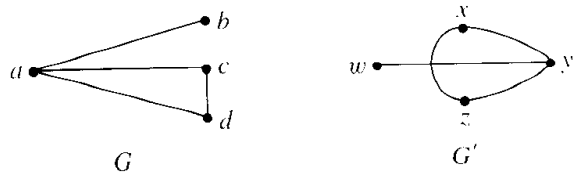
7. Da li su prikazani grafovi međusobno izomorfni




Rešenje

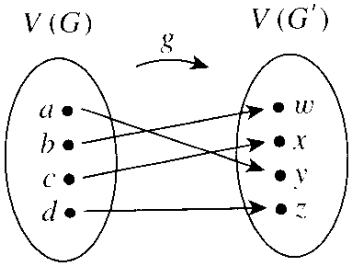
a. G ima 9 čvorova dok G’ ima samo 8. Nisu izomorfni
b. H ima čvor stepena 4, dok H’ nema takav čvor. Dakle, nisu izomorfni

8. Da li su grafovi na slici međusobno izomorfni? Definisati izomorfizam




Rešenje:

Jesu. Izomorfizam $f: V(G) \to V(G')$ je definisan na sledeći način:



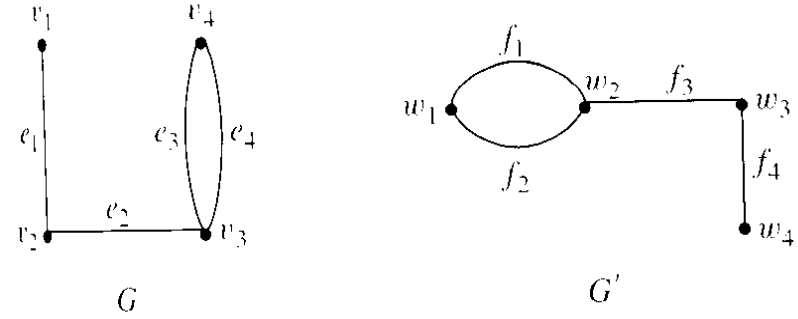

Dok je funkcija g definisana na sledeći način

| Grana | Grane u G’ |
|---|---|
| $\{a, b\}$ | $\{y, w\} = \{g(a), g(b)\}$ |
| $\{a, c\}$ | $\{y, x\} = \{g(a), g(c)\}$ |
| $\{a, d\}$ | $\{y, z\} = \{g(a), g(d)\}$ |
| $\{c, d\}$ | $\{x, y\} = \{g(c), g(d)\}$ |

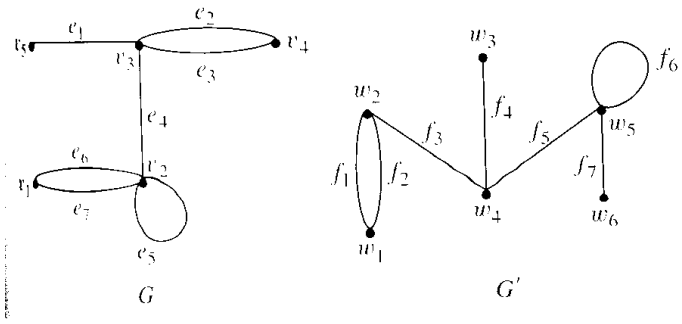
## Zadaci za vežbu

1. Da li su seledeći grafovi izomorfni. Ako jesu, odrediti preslikavanja g, i h. Ako nisu, odrediti njima izomorfne varijante po kojima se razlikuju.

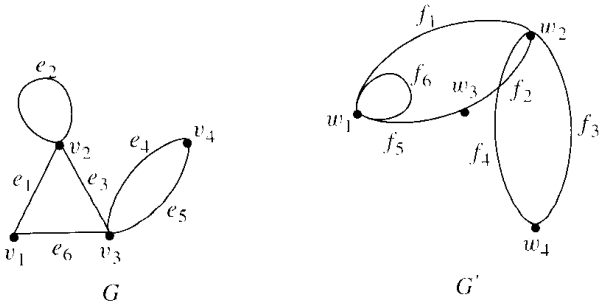
a.



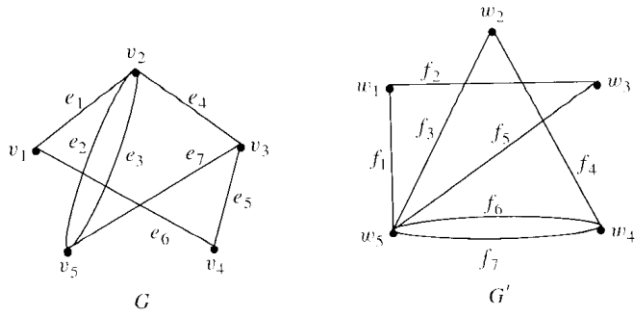

b.



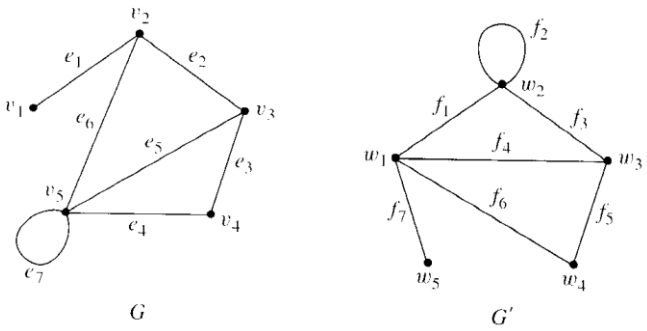

c.



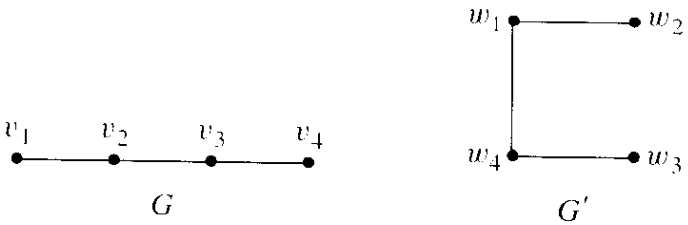

d.



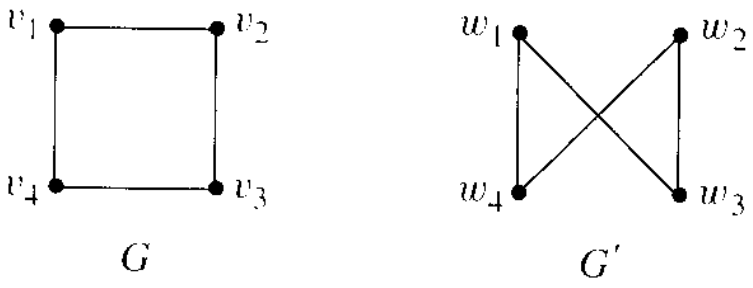

e.



f.




g.




2. Nacrtati sve neizomorfne proste grafove sa tri čvora
3. Nacrtati sve neizomorfne proste grafove sa četiri čvora
4. Nacrtati sve neizomorfne grafove sa tri čvora i sa ne više od dve grane