Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - испитни рок септембар 1
2.9.2020.

1. а) [5] Објаснити шта значи да је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и да је скуп $E \subset X$ мерљив на овом простору.

   б) [5] Да ли постоје два немерљива скупа чија су и унија и пресек мерљиви скупови?

   в) [10] Нека су $E_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, мерљиви скупови такви да је за све $i \neq j$, $\mu(E_i \cap E_j) = 0$. Доказати да је
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n).$$

2. Нека је дат простор са мером $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

   а) [5] Дати пример једне мерљиве и једне немерљиве функције и објаснити.

   б) [10] Доказати да су $f+g$ и $f-g$ мерљиве функције ако и само ако су f и g мерљиве функције.

   в) [5] Ако је $f+g$ мерљива функција, да ли онда и f мора бити мерљива?

3. а) [5] Дефинисати бројачку (у ознаци ν) и Диракову меру у тачки 2020 (у ознаци $\delta_{\{2020\}}$) на простору $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

   б) [10] Ако је $\mu(E) = \nu(E) + \delta_{\{2020\}}(E)$, доказати, поступком сличним увођењем интеграла, да је
$$\int\limits_{\mathbb{N}} g\, d\mu = \int\limits_{\mathbb{N}} g\, d\nu + \int\limits_{\mathbb{N}} g\, d\delta_{\{2020\}},$$
   за све мерљиве функције $g : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$.

   в) [5] Нека је $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ дата са $f(n) = e^{-n}$. Израчунати $\int\limits_{\mathbb{N}} f\, d\mu$.

4. а) [10] Доказати $\int\limits_0^1 x^a \log(1-x)\, dx = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+a+n)}$, $a > 0$.

   б) [10] Израчунати $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4+3n)}$.

5. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером.

   а) [8] Дефинисати простор $L^p(X, \mu)$.

   б) [7] Нека $f \in L^\infty(X, \mu) \cap L^p(X, \mu)$, за све $p \geq p_0$ и $\mu(X) < \infty$. Показати да је $\lim\limits_{p \to \infty} ||f||_p = ||f||_\infty$.

   в) [5] Ако $f \in L^p(X, \mu)$, за свако $p \geq 1$, да ли тада важи $f \in L^\infty(X, \mu)$?

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

Решења:

1. а) X је произвољан непразан скуп, $\mathfrak{M}$ је σ-алгебра над X (Дефиниција 2.2) и $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ је мера (Дефиниција 2.19.). Подскуп $E \subset X$ је мерљив ако и само ако важи $E \in \mathfrak{M}$.

   б) Да. На пример, нека је $X = [0, 1]$, $\mathfrak{M}$ Лебегова σ-алгебра и μ Лебегова мера. Виталијев скуп $V \subset [0, 1]$ је Лебег-немерљив, такође је и $V^{\complement} = [0, 1] \backslash V$ Лебег-немерљив (да је $V^{\complement}$ мерљив, онда би због својства (2) сваке σ-алгебре и скуп $(V^{\complement})^{\complement} = V$ био мерљив). Скупови $V \cap V^{\complement} = \emptyset$ и $V \cup V^{\complement} = [0, 1]$ су Лебег-мерљиви.

   в) Приметимо да $\mu(E_i \cap E_j) = 0$ не значи обавезно да су скупови E_i и E_j дисјунктни. Нека је $F_1 = E_1$, $F_2 = E_2 \backslash E_1$, $\dots$, $F_n = E_n \backslash (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1}) \dots$ Скупови F_n су међусобно дисјунктни. Нека студент провери да је $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = \bigsqcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$. Покажимо да је $\mu(E_n) = \mu(F_n)$. Из субадитивности мере и услова задатка важи

$$\begin{aligned}
\mu(E_n) &= \mu(E_n \cap (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})) + \mu(E_n \cap (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})^{\complement}) \\
&= \mu((E_n \cap E_1) \cup \dots \cup (E_n \cap E_{n-1})) + \mu(E_n \backslash (E_1 \cup \dots \cup E_{n-1})) \\
&\leqslant \mu(E_n \cap E_1) + \dots + \mu(E_n \cap E_{n-1}) + \mu(F_n) = \mu(F_n).
\end{aligned}$$

   Са друге стране, због дефиниције скупова F_n важи $F_n \subseteq E_n$ па је због монотоности мере $\mu(F_n) \leqslant \mu(E_n)$. Дакле, $\mu(E_n) = \mu(F_n)$. Закључујемо

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \mu\left(\bigsqcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(F_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n).$$

2. а) На пример ако је $\mathfrak{M} = \{\emptyset, X\}$ онда је једина мерљива функција константна функција, а свака друга је немерљива.
   Наравно, ако је функција константа, тада постоји $k \in \overline{\mathbb{R}}$ тако да је $f(x) = k$ за све $x \in X$. Онда је наравно за произвољно $c \in \mathbb{R}$, скуп $\{x \in X \mid f(x) \leqslant c\}$ једнак или X (за $c \geqslant k$) или $\emptyset$ (уколико је $c \leqslant k$), но свакако $\in \mathfrak{M}$, па је функција мерљива.
   С друге стране, ако функција није константа, тада постоје x_1 и x_2 из X такви да је $f(x_1) = c_1$ и $f(x_2) = c_2$, па скуп $\{x \in X \mid f(x) \leqslant c\}$ није ни $\emptyset$ ни X за $c \in (c_1, c_2)$, а самим тим $\notin \mathfrak{M}$, па функција није мерљива.

   б) Ако су $f+g$ и $f-g$ мерљиве, онда су и њихов збир $f+g+(f-g)$ и њихова разлика $f+g-(f-g)$ мерљиве функције. Дакле, $2f$ и $2g$ су мерљиве функције. Константна функција 2 је мерљива функција (за сваку σ-алгебру), па су и количници функција $\frac{2f}{2}$ и $\frac{2g}{2}$ мерљиве функције. Дакле, f и g су мерљиве. Са друге стране, ако су f и g мерљиве, онда је и њихов збир као и њихова разлика мерљиве функције (Став 3.5.(а)).

   в) Не мора! На пример $f(x) = x$, као и $g(x) = -x$ су немерљиве функције за горе поменуту σ-алгебру $\mathfrak{M} = \{\emptyset, X\}$ (нису константе), али $f + g = 0$ је константна функција и она јесте мерљива.

3. а) Бројачка мера (страна 34, пример 2.34.). Диракова мера се дефинише на свим подскуповима $E \subseteq \mathbb{N}$, дакле на максималној σ-алгебри. У овом случају је $\delta(E) = \begin{cases} 1, & 2020 \in E; \\ 0, & 2020 \notin E. \end{cases}$

   б) Задатак ћемо урадити корак по корак, поступком сличним увођењу интеграла реалне функције, као што је наведено.
   1. $g = \chi_E$ - Докажимо да једнакост важи за карактеристичну функцију мерљивог скупа $E \in \mathfrak{M}$.

$$\int\limits_{\mathbb{N}} g\, d\mu = \int\limits_{\mathbb{N}} \chi_E\, d\mu = \mu(E) = \nu(E) + \delta_{\{2020\}}(E) = \int\limits_{\mathbb{N}} \chi_E\, d\nu + \int\limits_{\mathbb{N}} \chi_E\, d\delta_{\{2020\}} = \int\limits_{\mathbb{N}} g\, d\nu + \int\limits_{\mathbb{N}} g\, d\delta_{\{2020\}},$$

при чему све једнакости следе по дефиницији интеграла или саме функције f.
2. g проста ненегативна - Тада је $g = \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$ за неке $c_i \geqslant 0$ и $E_i \in \mathfrak{M}$. Важи:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{N}} g \; d\mu = \int\limits_{\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i} \; d\mu &= \sum_{i=1}^{n} c_i \int\limits_{\mathbb{N}} \chi_{E_i} \; d\mu \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\int\limits_{\mathbb{N}} \chi_{E_i} \; d\nu + \int\limits_{X} \chi_{E_i} \; d\delta_{\{2020\}} \right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \int\limits_{\mathbb{N}} \chi_{E_i} \; d\nu + \sum_{i=1}^{n} c_i \int\limits_{\mathbb{N}} \chi_{E_i} \; d\delta_{\{2020\}} \\
&= \int\limits_{\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i} \; d\nu + \int\limits_{\mathbb{N}} \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i} \; d\delta_{\{2020\}} \\
&= \int\limits_{\mathbb{N}} g \; d\nu + \int\limits_{\mathbb{N}} g \; d\delta_{\{2020\}},
\end{aligned}$$

при чему у другој и петој једнакости коначна сума може да изађе испред, односно да уђе под интеграл (линеарност интеграла), док трећа једнакост следи из *1.* дела.
3. g ненегативна мерљива - Тада постоји низ ненегативних, простих, растућих и мерљивих функција, таквих да $s_n \to g$ (став 3.8. в)).

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{N}} g \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{N}} s_n \; d\mu &= \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_{\mathbb{N}} s_n \; d\nu + \int\limits_{\mathbb{N}} s_n \; d\delta_{\{2020\}} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{N}} s_n \; d\nu + \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{N}} s_n \; d\delta_{\{2020\}} \\
&= \int\limits_{\mathbb{N}} g \; d\nu + \int\limits_{\mathbb{N}} g \; d\delta_{\{2020\}},
\end{aligned}$$

при чему прва и четврта једнакост следе из ТМК, док друга једнакост следи из *2.* дела (s_n је проста ненегативна функција).
4. g произвољна мерљива, $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ - Тада је $g = g^+ - g^-$, при чему је $g^+(x) = \max\{g(x), 0\}$ и $g^-(x) = \max\{-g(x), 0\}$. Тада за њих важи *3.* део (друга једнакост у наредном низу), па је

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{N}} g \; d\mu = \int\limits_{\mathbb{N}} g^+ \; d\mu - \int\limits_{\mathbb{N}} g^- \; d\mu &= \left(\int\limits_{\mathbb{N}} g^+ \; d\nu + \int\limits_{\mathbb{N}} g^+ \; d\delta_{\{2020\}} \right) - \left(\int\limits_{\mathbb{N}} g^- \; d\nu + \int\limits_{\mathbb{N}} g^- \; d\delta_{\{2020\}} \right) \\
&= \left(\int\limits_{\mathbb{N}} g^+ \; d\nu - \int\limits_{\mathbb{N}} g^- \; d\nu \right) + \left(\int\limits_{\mathbb{N}} g^+ \; d\delta_{\{2020\}} - \int\limits_{\mathbb{N}} g^- \; d\delta_{\{2020\}} \right) \\
&= \int\limits_{\mathbb{N}} g \; d\nu + \int\limits_{\mathbb{N}} g \; d\delta_{\{2020\}},
\end{aligned}$$

при чему прва и четврта једнакост важе по дефиницији интеграла, док трећа важи из интеграбилности g у односу на ν и $\delta_{\{2020\}}$.

в) Узимајући у обзир дефиниције интеграла по бројачкој, односно Дираковој мери, добијамо да је

$$\int\limits_{\mathbb{N}} f \, d\mu = \int\limits_{\mathbb{N}} f \, d\nu + \int\limits_{\mathbb{N}} f \, d\delta_{\{2020\}} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} + e^{-2020} = e^{-1} \frac{1}{1 - e^{-1}} + e^{-2020} = \frac{1}{e-1} + e^{-2020}.$$

4. а)

$$\int_0^1 x^a \log(1-x)dx = \int_0^1 x^a \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(-x)^n \frac{1}{n}dx = -\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} x^{n+a}\frac{1}{n}dx.$$

Пошто $g_n = \frac{x^{n+a}}{n} \geq 0$ следи да је низ $f_n = g_1 + \cdots + g_n$ растући низ, па можемо применити ТМК. Дакле лимес и сума комутирају па је израз једнак:

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{x^{n+a}}{n}dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^1 x^{n+a}dx = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{n+a+1}.$$

б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(4+3n)} = \frac{1}{3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\frac{4}{3}+n)}$. Искористимо део под а) узевши за $a = \frac{1}{3}$. Дакле

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(4+3n)} = -\frac{1}{3}\int_0^1 x^{\frac{1}{3}}\log(1-x)dx.$$

Решавамо прво неодређени интеграл $\int x^{\frac{1}{3}}\log(1-x)dx$ парцијалном интеграцијом $u = \log(1-x)$, $v = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}$. Следи

$$\int x^{\frac{1}{3}}\log(1-x)dx = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{3}}\log(1-x) + \frac{3}{4}\int\frac{x^{\frac{4}{3}}}{(1-x)}dx.$$

Сада уводимо смену $x^{\frac{1}{3}} = t$ и следи

$$\int\frac{x^{\frac{4}{3}}}{(1-x)}\,dx = 3\int\frac{t^6}{1-t^3}\,dt.$$

Даље је

$$\begin{aligned}\int\frac{t^6}{1-t^3}\,dt = \int\frac{t^6+1-1}{1-t^3}\,dt &= -\int\frac{1-t^6}{1-t^3}dt + \int\frac{1}{1-t^3}\,dt\\ &= -\int(1+t^3)dt + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1-t} + \frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t+t^2}\\ &= -t - \frac{t^4}{4} - \frac{1}{2}\log(1-t) + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2t+1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Коначан резултат је

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(4+3n)} = -\frac{5\cdot 3^{\frac{3}{2}} - 2\cdot 3^{\frac{3}{2}}\log 3 - 2\pi}{16\sqrt{3}}.$$

5. а) Дефиниција 4.6.

б) Став 4.14.

в) Не мора да важи. Пример је функција рецимо $f(x) = \log x$ на интервалу $(0,1)$, при чему посматрамо Лебегову меру μ. Ова функција није есенцијално ограничена зато што за произвољно $M > 0$ на скупу $(0, e^M)$ који је позитивне мере важи $|f| > M$. Али важи $f \in L^p(0,1)$, за свако $p \geq 1$. Треба да проверимо $\int\limits_0^1 \log^p x\,dx < \infty$. (Суштински, треба да покажемо да $\int\limits_0^1 |\log x|^p\,dx < \infty$, но под апсолутном вредношћу је негативна функција, па се заправо доказивање своди на претходно наведено.) Уведимо смену $\log x = t$ па добијамо $\int\limits_0^1 \log^p x\,dx = \int\limits_{-\infty}^0 t^p e^t dt$. Довољно је показати да је $I(p) = \int\limits_{-\infty}^0 t^p e^t dt < \infty$. Парцијалном интеграцијом добијамо

$$I(p) = t^p e^t\Big|_{-\infty}^{0} - pI(p-1) = -pI(p-1).$$

Пошто је $I(1) = -1$ добијамо $I(p) = (-1)^p p! < \infty$. Приметимо и да смо проблем могли решити увођењем смене $s = -t$ у интеграл $I(p) = \int\limits_{-\infty}^{0} t^p e^t dt$, након чега се добија $I(p) = \int\limits_{0}^{+\infty} (-1)^p s^p e^{-s}\, ds = (-1)^p \Gamma(p+1) = (-1)^p p!$.