Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - испитни рок септембар 1
2.9.2020.

1. а) [5] Објаснити шта значи да је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и да је скуп $E \subset X$ мерљив на овом простору.

   б) [5] Да ли постоје два немерљива скупа чија су и унија и пресек мерљиви скупови?

   в) [10] Нека су $E_n \subset X$, $n \in \mathbb{N}$, мерљиви скупови такви да је за све $i \neq j$, $\mu(E_i \cap E_j) = 0$. Доказати да је
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n).$$

2. Нека је дат простор са мером $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

   а) [5] Дати пример једне мерљиве и једне немерљиве функције и објаснити.

   б) [10] Доказати да су $f + g$ и $f - g$ мерљиве функције ако и само ако су f и g мерљиве функције.

   в) [5] Ако је $f + g$ мерљива функција, да ли онда и f мора бити мерљива?

3. а) [5] Дефинисати бројачку (у ознаци ν) и Диракову меру у тачки 2020 (у ознаци $\delta_{\{2020\}}$) на простору $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

   б) [10] Ако је $\mu(E) = \nu(E) + \delta_{\{2020\}}(E)$, доказати, поступком сличним увођењем интеграла, да је
$$\int\limits_{\mathbb{N}} g\, d\mu = \int\limits_{\mathbb{N}} g\, d\nu + \int\limits_{\mathbb{N}} g\, d\delta_{\{2020\}},$$
   за све мерљиве функције $g : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$.

   в) [5] Нека је $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ дата са $f(n) = e^{-n}$. Израчунати $\int\limits_{\mathbb{N}} f\, d\mu$.

4. а) [10] Доказати $\int\limits_0^1 x^a \log(1-x)\, dx = -\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(1+a+n)}$, $a > 0$.

   б) [10] Израчунати $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(4+3n)}$.

5. Нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером.

   а) [8] Дефинисати простор $L^p(X, \mu)$.

   б) [7] Нека $f \in L^\infty(X, \mu) \cap L^p(X, \mu)$, за све $p \geq p_0$ и $\mu(X) < \infty$. Показати да је $\lim\limits_{p \to \infty} ||f||_p = ||f||_\infty$.

   в) [5] Ако $f \in L^p(X, \mu)$, за свако $p \geq 1$, да ли тада важи $f \in L^\infty(X, \mu)$?

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.