Математички факултет, Универзитет у Београду
Теорија мере и интеграције (Р и Л смер) - испитни рок јун 2
7.7.2020.

1. а) [2] Нека су $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ мере на простору $(X, \mathfrak{M})$ и $c_1, c_2, \dots, c_n > 0$. Доказати да је тада са

$$\lambda(E) = c_1\lambda_1(E) + c_2\lambda_2(E) + \cdots + c_n\lambda_n(E)$$

дефинисана мера на $(X, \mathfrak{M})$.

б) [8] На Лебеговој σ-алгебри $\mathfrak{M}$ над $\mathbb{R}$, дефинишимо функцију $\mu : \mathfrak{M} \to [0, +\infty]$ са

$$\mu(E) = 2m\left(E \cap \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right) + e\delta_{\{0\}}(E) + \pi\delta_{\{\frac{1}{\sqrt{2}}\}}(E),$$

при чему је m Лебегова мера на $\mathbb{R}$, док су $\delta_{\{0\}}$ и $\delta_{\{\frac{1}{\sqrt{2}}\}}$ Диракове мере у одговарајућим тачкама. Доказати да је μ мера и израчунати $\mu(\mathbb{Q}), \mu(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ и $\mu(K)$, где је K Канторов скуп.

в) [12] Доказати да је функција

$$f(x) = \begin{cases} |\operatorname{arctg} x|, \ x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right] \\ \operatorname{sgn} x, \ x \in \left(-\frac{1}{3}, 1\right] \setminus K \\ \sin\frac{1}{x^2+1}, \ x \in K \\ e^x, \ x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Борел мерљива и израчунати $\int\limits_{\mathbb{R}} f \, d\mu$.

г) [3] Доказати да је са

$$\mathfrak{N} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ пребројив или } \ A^\complement \text{ пребројив}\}$$

дефинисана једна σ-алгебра на $\mathbb{R}$.

д) [5] Да ли је функција f $\mathfrak{N}$-мерљива?

ђ) * [5] Описати све $\mathfrak{N}$-мерљиве функције $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$.

2. [16] Комплетност мере - дефиниција. Дати пример комплетне и некомплетне мере и објаснити.

3. а) [13] Теорема о доминантној конвергенцији (формулација и доказ).

б) [13] Израчунати $\lim\limits_{n\to\infty} n \int\limits_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{\left(\sin\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}\right)^n \cdot e^{x^2}}{1 + n^3(x-1)^2} \, dx.$

4. Нека је $(\mathbb{R}, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером, при чему је $\mathfrak{M}$ Лебегова σ-алгебра, а μ Лебегова мера. Нека је дат низ функција $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ са $f_n(x) = ne^{-n|x|}$.

а) [5] Испитати за које $p \in [1, +\infty)$, $f_n \in L^p(\mu)$ када $n \to \infty$;

б) [5] Испитати конвергенцију низа f_n μ скоро свуда;

в) [5] Испитати конвергенцију низа f_n у L^1;

г) [5] Испитати конвергенцију низа f_n по мери μ;

д) [8] Да ли из L^1 конвергенције следи конвергенција по мери? Да ли из конвергенције по мери следи конвергенција у L^1-норми? Уколико је тврдња тачна, доказати је, уколико није, дати контрапример.

Напомена: У угластим заградама је наведено колико сваки део задатка носи поена. Време за израду задатака је 180 минута.

Решења

Наводимо решења само оних задатака чији одговори не постоје у књизи. За све остале одговоре наводимо дефиниције и теореме из књиге аутора проф. др Драгољуба Кечкића. Наравно, ни једно ни друго нису једина решења.

1. а) $\lambda(\emptyset) = c_1\lambda_1(\emptyset) + \cdots + c_n\lambda_n(\emptyset) \overset{*}{=} 0$, а важи и адитивност мере:

$$\lambda\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = c_1\lambda_1\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) + \cdots + c_n\lambda_n\left(\bigsqcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \overset{*}{=} \sum_{j=1}^{\infty} c_1\lambda_1(A_j) + \cdots + c_n\lambda_n(A_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(A_j).$$

Једнакости $*$ важе зато што су $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ мере.

б) Да бисмо искористили део под а) у сврху доказивања да је μ мера, потребно је да само покажемо да је $\lambda_1(E) \overset{def}{=} m\left(E \cap \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right)$ мера. Важи $\lambda_1(\emptyset) = m(\emptyset) = 0$ и

$$\lambda_1\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = m\left(\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \cap \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right) \overset{*_1}{=} m\left(\bigsqcup_{n=1}^{\infty}\left(E_n \cap \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right)\right)$$

$$\overset{*_2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} m\left(E_n \cap \left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_1(E_n).$$

При том $*_1$ важи због дистрибутивности пресека према унији, а $*_2$ зато што је m мера. Пошто је μ дефинисана као линеарна комбинација три мере, онда је на основу а) и μ једна мера. Нађимо $\mu(\mathbb{Q}), \mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})$ и $\mu(K)$. Пошто је $m(\mathbb{Q}) = m(K) = 0$ следи $\mu(\mathbb{Q}) = e$, $\mu(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}) = 2+\pi$ и $\mu(K) = e$.

в) Доказ следи из општијег тврђења: нека је $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ простор са мером и

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), \ x \in D_1 \\ \vdots \\ f_n(x), \ x \in D_n \end{cases}$$

функција дефинисана на скупу $X = D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_n$. Ако су скупови $D_1, \ldots, D_n$ мерљиви и ако су функције $f_1, \ldots, f_n$ мерљиве, онда је и f мерљива. Докажимо ово тврђење. Нека је $c \in \mathbb{R}$ произвољна константа. Тада је

$$\{x \in X | f(x) < c\} = \Big(\{x \in X | f_1(x) < c\} \cap D_1\Big) \sqcup \cdots \sqcup \Big(\{x \in X | f_n(x) < c\} \cap D_n\Big).$$

Пошто су сви скупови на десној страни једнакости мерљиви, тј. припадају σ-алгебри $\mathfrak{M}$, онда је и скуп на левој страни једнакости мерљив, па је и f мерљива функција. У конкретном случају су скупови $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$, $\left(-\frac{1}{3}, 1\right] \setminus K$, K и $(1, +\infty)$ мерљиви, затим функције $|\operatorname{arctg} x|$, $\sin\frac{1}{x^2+1}$ и e^x су непрекидне па и мерљиве, док је функција $\operatorname{sgn} x$ проста па је коначно и она мерљива, а самим тим је таква и f.

На основу дефиниције функције f и задатка 45 са вежби, важи

$$\int_X f\, d\mu = \int_{D_1} f_1\, d\mu + \cdots + \int_{D_n} f_n d\mu.$$

Сада треба да израчунамо тражени интеграл. На основу дефиниције мере μ важи

$$\int_{\mathbb{R}} f\, d\mu = 2 \int_{\left[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]} f dm + e f(0) + \pi f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

У нашем случају функције f и мере μ добијамо

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f\,d\mu &= 2\left(\int\limits_{\left[-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]\setminus K} f dm + \int\limits_{K\cap\left[0,\frac{2}{3}\right]} f dm\right) + ef(0) + \pi f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\\
&= 2\left(\int\limits_{\left[-\frac{1}{3},0\right]\setminus K} f dm + \int\limits_{\left[0,\frac{2}{3}\right]\setminus K} f dm + \int\limits_{K\cap\left[0,\frac{2}{3}\right]} f dm\right) + e\sin 1 + \pi\\
&\overset{*}{=} 2\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+0\right) + e\sin 1 + \pi = \frac{2}{3} + e\sin 1 + \pi.
\end{aligned}$$

$*$ пошто је мера Канторовог скупа K једнака нули, онда је трећи интеграл нула.

г) $\mathfrak{N} = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A$ пребројив или $A^{\complement}$ пребројив$\}$. Јасно је $\emptyset \in \mathfrak{N}$, јер му је кардиналност нула. Нека важи $A \in \mathfrak{N}$ и покажимо $A^{\complement} \in \mathfrak{N}$. Ако је A пребројив онда је $(A^{\complement})^{\complement} = A$ пребројив па $A^{\complement} \in \mathfrak{N}$, а ако је $A^{\complement}$ пребројив онда такође важи $A^{\complement} \in \mathfrak{N}$. Нека важи $A_n \in \mathfrak{N}$, за све $n \in \mathbb{N}$ и покажимо $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{N}$. Ако је за свако $n \in \mathbb{N}$ скуп A_n пребројив, онда је и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ пребројив, па припада фамилији $\mathfrak{N}$. С друге стране, ако постоји $n_0 \in \mathbb{N}$ такав да је $A_{n_0}^{\complement}$ пребројив онда је и $\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{\complement} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n^{\complement} \subseteq A_{n_0}^{\complement}$ пребројив, па припада фамилији $\mathfrak{N}$. Тиме смо показати да је $\mathfrak{N}$ једна σ-алгебра на $\mathbb{R}$.

д) f није $\mathfrak{N}$-мерљива зато што скуп $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) > e\} = (1,\infty)$ није пребројив, а није ни његов комплемент $(-\infty, 1]$ пребројив, па не припада σ-алгебри $\mathfrak{N}$.

ђ) Као прво, константна функција f је мерљива у свакој мери зато што $\{x \in X \mid f(x) < c\}$ је или $\emptyset$ или X, а ова два скупа припадају свакој σ-алгебри над X. Покажимо сада да је $\mathfrak{N}$-мерљива свака функција која је константна свуда осим у највише пребојиво много тачака. Нека је $f(x) = C$ за све $x \in \mathbb{R}$ осим за $x_n, n \in \mathbb{N}$ где је $f(x_n) = c_n$. Тада је $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < c\}$ једнак:
-$\emptyset$, ако $c < C, c_1, c_2, \ldots$;
-x_{n_k}, ако је $c_{n_k} < c < C, c_{n_j}$, за неке n_k и n_j;
-$\mathbb{R}\setminus x_{n_k}$, ако $c_{n_j}, C \leq c < c_{n_k}$, за неке n_k и n_j;
-$\mathbb{R}$ ако $C, c_1, c_2, \ldots < c$.
Сви наведени скупови припадају $\mathfrak{N}$ па је f мерљива. Покажимо да су мерљиве једино овакве функције. Приметимо прво да су једини мерљиви скупови управо облика $\emptyset$, $\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{R}\setminus\{x_{n_k} \mid k \in \mathbb{N}\}$, $\mathbb{R}$. Дакле, скуп $\{x \in \mathbb{R} | f(x) < c\}$ мора бити таквог облика. То значи да f може узимати највише пребројиво много вредности и да само једна вредност може да се узима на непребројивом скупу. Дакле закључујемо је константна свуда осим у највише пребојиво много тачака.

2. Одељак 2.24. из књиге, као и референце на које се указује.

3. а) Теорема 3.24. из књиге.

б) Желимо да нађемо интеграбилну доминанту, па пре свега приметимо да интеграцију вршимо на скупу коначне мере. Запишимо интеграл на следећи начин

$$\int\limits_0^1 \left(\sin\frac{1}{n} + \cos\frac{1}{n}\right)^n \frac{n}{1+n^3(x-1)^2} e^{x^2} \chi_{\left[\frac{1}{n},1\right]}(x)\,dx.$$

Приметимо најпре да је e^{x^2} растућа, па важи оцена

$$e^{x^2}\chi_{\left[\frac{1}{n},1\right]} \leqslant e.$$

Такође, како у интеграбилној доминанти треба да имамо израз који не зависи од n, уочимо да је $\left(\sin\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}\right)^n$ конвергентан, па самим тим и ограничен (са неко $M>0$). Наиме,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(\sin\frac{1}{n}+\cos\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to\infty}e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)}=e.$$

Остатак задатка је истоветан задатку 49. са вежби, па је по њему коначан резултат 0.

4. а) Дакле, треба да испитамо за које $p\in[1,+\infty)$ је израз

$$\int_{\mathbb{R}}\left|ne^{-n|x|}\right|^p\,dx$$

коначан када $n\to\infty$. Но, приметимо да је функција под апсолутном вредношћу позитивна и паран, па је тражени израз једнак

$$2\int_0^{+\infty}n^pe^{-npx}\,dx.$$

Уведимо у претходном изразу смену $nx=t$. Тада интеграл постаје

$$2\int_0^{+\infty}n^pe^{-pt}\frac{dt}{n}=2n^{p-1}\int_0^{+\infty}e^{-pt}\,dt=2n^{p-1}\left(-\frac{e^{-pt}}{p}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{2n^{p-1}}{p}.$$

Дакле, последњи израз је $<\infty$ када $n\to\infty$ само за $p=1$ и тада износи 2.

б) Узмимо произвољан реалан број x, $x\neq 0$ (приметимо да је $f_n(0)=n$ што тежи ка $+\infty$). Посматрајмо лимес тачка по тачка

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{e^{n|x|}}=\frac{1}{|x|}\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=\frac{1}{|x|}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{e^t}=\frac{1}{|x|}\cdot 0=0,$$

при чему смо у другој једнакости искористили смену промењиве, док смо у трећој искористили Лопиталово правило. Како, је тачка скуп мере нула, то по дефиницији $f_n(x)\to f(x)$ μ скоро свуда, где је $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ таква да је $f(x)=0$ за све $x\in\mathbb{R}$

в) Из примера под б) једини кандидат за конвергенцију у L^1 је нула функција. Дакле треба испитати да ли је $\|f_n-0\|_1$ једнако нули кад $n\to\infty$. Но, приметимо да смо у примеру а) већ израчунали да је $\|f_n\|_1=2$ за све $n\in\mathbb{N}$, па $f_n\not\to 0$ у L^1.

г) Опет је једини кандидат нула функција. Фиксирајмо $\varepsilon>0$. Посматрајмо скуп

$$A_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}\mid |f_n(x)|\geqslant\varepsilon\}=\{x\in\mathbb{R}\mid ne^{-n|x|}\geqslant\varepsilon\}.$$

Дељењем са n, а потом ln-овањем обе стране добијамо да је

$$A_\varepsilon=\left\{x\in\mathbb{R}\mid -n|x|\geqslant\ln\frac{\varepsilon}{n}\right\}=\left\{x\in\mathbb{R}\mid |x|\leqslant\frac{\ln n-\ln\varepsilon}{n}\right\}=\left[-\frac{\ln n-\ln\varepsilon}{n},\frac{\ln n-\ln\varepsilon}{n}\right].$$

Одавде је јасно да је

$$\lim_{n\to\infty}\mu\left(A_\varepsilon\right)=2\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n-\ln\varepsilon}{n}=0,$$

па $f_n\xrightarrow{\mu}0$. Притом смо у последњем кораку искористили да је n "јаче" од $\ln n$, и да је $\ln\varepsilon$ константа јер смо на почетку фиксирали $\varepsilon>0$.

д) Из L^1 конвергенције следи конвергенција по мери што је показано у ставу 4.23. Обратно не мора да важи и пример је баш овај низ нпр.