Писмени испит из Конвексне анализе **ЈУН 2 2020**

1. Функција $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ се назива *квазиконвексна* ако за све $x, y \in \mathbb{R}^n$ и све $\lambda \in [0,1]$ важи

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}.$$

(а) Показати да је функција $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ квазиконвексна ако и само ако су скупови $\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq a\}$ конвексни за све $a \in \mathbb{R}$.

(б) Да ли је свака конвексна функција квазиконвексна?
Да ли је свака квазиконвексна функција конвексна?

2. Одредити конјуговане функције следећих функција:
(а) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^2 + 4x$.
(б) $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 2x^2 + 3(y-4)^2$.

3. (а) Нека су $k_1(C_1, r_1)$ и $k_2(C_2, r_2)$ кружнице у равни са центрима C_1 и C_2, и полупречницима r_1 и r_2, редом. Доказати да је њихово Хаусдорфово растојање једнако:

$$D(k_1, k_2) = d(C_1, C_2) + |r_2 - r_1|.$$

(б) Ако су $S_1(C_1, r_1)$ и $S_2(C_2, r_2)$ одговарајуће сфере димензије $n-1$ у простору $\mathbb{R}^n$, показати да за њихово Хаусдорфово растојање важи формула аналогна претходној.

4. Нека је $f: D^2 \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ непрекидно пресликавање. Доказати да за неко $x_0 \in S^1$ важи $||f(x_0)|| \cdot x_0 = f(x_0)$.